Interpolarea funcţiilor.

– Metode de interpolare pe porţiuni. –

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" Bucureşti, Facultatea de Inginerie Electrică

Suport didactic pentru disciplina *Metode numerice*, 2017-2018

Notes

Cuprins

Notes

Preliminarii

Scrierea formală a unei probleme

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \tag{1}$$

$\mathbf{x}$ - datele problemei (parametri independenţi);
$\mathbf{y}$ - mărimile de interes ce se doresc a fi estimate.

De exemplu, f poate reprezenta:

- un proces de măsurare a mărimilor $\mathbf{y}$ pentru o anumită stare complet caracterizată de $\mathbf{x}$;
- un program software complicat, capabil să analizeze configuraţia caracterizată complet de datele $\mathbf{x}$ şi să calculeze printr-un algoritm de postprocesare mărimile $\mathbf{y}$.

Notes

Preliminarii

Formularea problemei (neriguros)

Se dă o funcţie reprezentată prin date:
$(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$, $k = 0, \ldots, n$, unde $\mathbf{y}_k = f(\mathbf{x}_k)$.
Se doreşte găsirea unei expresii analitice pentru o funcţie g care să aproximeze aceste date adică
$g(\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{y}_k$ sau chiar $g(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$.

- Interpolare setului de date: g trece prin punctele mulţimii de date: $g(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$
- Aproximarea (regresia) setului de date = g trece printre punctele mulţimii de date: $g(\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{y}_k$

Notes

Preliminarii

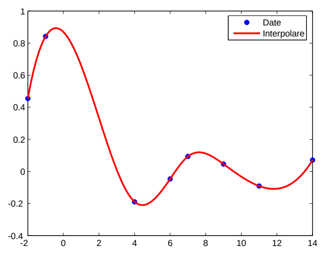
Observaţii:

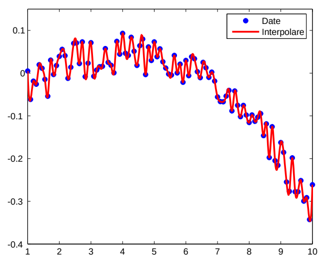
1. $\mathbf{x}_k$ se numeşte şi reţea (grid) de discretizare.
2. Interpolarea/aproximarea este utilă şi dacă funcţia este reprezentată prin cod = există un software capabil să calculeze $f(\mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x}$ dorit, dacă efortul de evaluare al lui f este mare.

Notes

Preliminarii

Exemple: interpolare



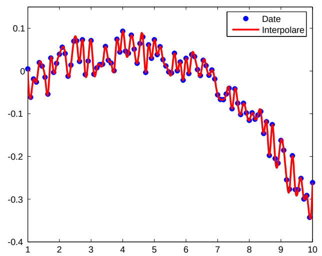


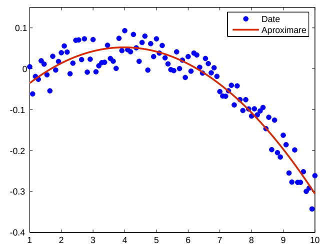
Interpolarea unui set de date. În cazul în care setul de date are foarte multe valori, interpolarea poate genera oscilaţii nedorite.

Notes

Preliminarii

Exemple: interpolare vs. aproximare





Avantajul aproximării: se diminuează erorile de măsurare din rezultatul final.

Notes

Precizări $f : ? \to ?$

- Cazul scalar unidimensional (1D): $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- Cazul vectorial unidimensional $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$ se reduce la m interpolări/aproximări 1D.
- Cazul scalar bidimensional (2D) $f, g : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$
- Cazul scalar n-dimensional (nD) $f, g : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- Cazul cel mai general $f, g : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se reduce la m situaţii de tip nD.

În cele ce urmează vom pp. cazul 1D.

Notes

Distanţa dintre două funcţii

Se doreşte ca $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ să aproximeze/interpoleze cât mai bine funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$

distanţa dintre cele două funcţii

$$d(f, g) = \|f - g\| \tag{2}$$

să fie cât mai mică.

Există mai multe procedee de definire a normei.

Notes

Distanţa dintre două funcţii

Procedee de definire a normei.

- Aria dintre graficele celor două funcţii

$$d_1(f, g) = \frac{1}{b - a} \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Dezavantaj: local, pot exista diferenţe foarte mari între f sî g.

- Abaterea medie pătratică

$$d_2(f, g) = \sqrt{\frac{1}{b - a} \int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, \mathrm{d}x}. \tag{4}$$

Acelaşi dezavantaj.

Notes

Distanţa dintre două funcţii

Procedee de definire a normei.

- Abaterea maximă dintre cele două funcţii

$$d_3(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|. \tag{5}$$

Din pdv al acurateţii - este cea mai avantajoasă.

OBS: Niciuna din aceste norme nu se poate evalua.

Notes

Distanţa dintre două funcţii

Normele discrete:

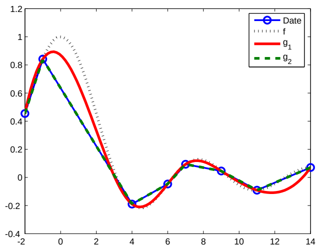
$$d_{1d}(f,g) = \sum_{k=0}^{n} |g(x_k) - f(x_k)|, \tag{6}$$

$$d_{2d}(f,g) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (g(x_k) - f(x_k))^2}, \tag{7}$$

$$d_{3d}(f,g) = \max_{k=\overline{0,n}} |g(x_k) - f(x_k)|. \tag{8}$$

Notes

Distanţa dintre două funcţii



Avantaj: pot fi evaluate cu uşurinţă.
Dezavantaj: se pierde posibilitatea evaluării acurateţii între noduri. Mai mult $d_d(f, g_1) = 0$; $d_d(f, g_2) = 0$; $\Rightarrow$ problemă prost formulată.

Notes

Formularea problemei interpolării

Se caută g pentru care $d_d(f, g) = 0$, unde f este cunoscută într-un număr finit de puncte $f(x_j) = y_j$.
Echivalent cu a impune condiţiile de interpolare

$$g(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n, \tag{9}$$

$\Leftrightarrow$

$$g(x_j) = y_j, \quad j = 0, \ldots, n. \tag{10}$$

Pentru a face ca problema să fie bine formulată matematic (soluţia să existe şi să fie unică) funcţia g se caută în spaţiul polinoamelor generalizate
$\Leftrightarrow$
g adică se caută de forma unei combinaţii liniare de m funcţii φ_k, $k = 1, \ldots, m$ numite funcţii de bază:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \varphi_k(x). \tag{11}$$

Notes

Formularea problemei interpolării

Funcţiile de bază se aleg înainte de rezolvarea propriu-zisă a problemei interpolării. Exemple:

- $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$, $\varphi_3(x) = \sin(2x)$, etc.
- $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$, $\varphi_3(x) = x^3$, etc.

Cei m coeficienţi c_k se calculează din impunerea condiţiilor de interpolare:

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \varphi_k(x_j) = y_j, \quad j = 0, \ldots, n, \tag{12}$$

$\Rightarrow$ Sistem algebric liniar cu $n+1$ ecuaţii şi $m+1$ necunoscute.

Notes

Formularea problemei interpolării

Pentru buna formulare matematică se impune ca $m = n$ şi

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \cdots & & & \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow x_j$ sunt distincte şi φ_k sunt liniar independente.

Notes

Formularea problemei interpolării

Date:

- un tabel de valori (x_k, y_k), $k = 0, \ldots, n$, unde punctele reţelei de discretizare x_k sunt distincte două câte două;
- $n + 1$ funcţii de bază liniar independente $\varphi_k(x)$, $k = 0, \ldots, n$.

Se cer:

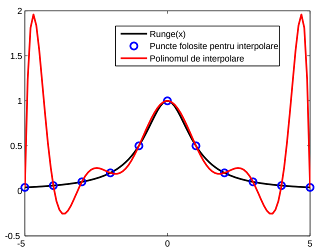
- coeficienţii c_k, $k = 0, \ldots, n$ pentru care sunt satisfăcute condiţiile de intepolare $g(x_j) = y_j$, $j = 0, \ldots, n$ unde $g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$ este polinomul de interpolare al datelor din tabel.

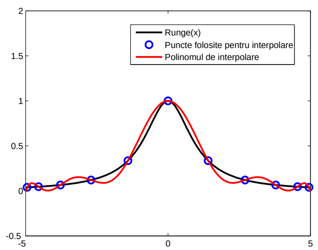
Notes

Interpolarea globală - concluzii

- Funcţiile de bază $\varphi_k(x)$ au o singură expresie pe tot domeniul de definiţie $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ polinomul de interpolare $g(x)$ are o singură expresie pe tot domeniul de definiţie.

Dezavantaj: efectul Runge - oscilaţii la capete.
Remediu: Interpolarea Cebyshev





Notes

Interpolarea globală - concluzii

- Efectul Runge poate fi evitat dacă nodurile gridului de discretizare se aleg în conformitate cu rădăcinile polinoamelor Cebyshev.

Dezavantaj: funcţia trebuie să fie definită prin cod, dar acest lucru nu este posibil întotdeauna.
Remediu: **Interpolarea pe porţiuni.**

- Funcţiile de bază $\varphi_k(x)$ sunt "funcţii cu acoladă", au expresii diferite pe intervalele care discretizează domeniul de definiţie $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ polinomul de interpolare $g(x)$ este o "funcţie cu acoladă".

Notes

Interpolarea liniară pe porţiuni

$\varphi_k(x)$ sunt polinoame Lagrange $l_k(x)$ definite pe porţiuni.
$l_k(x_k) = 1$
$l_k(x_j) = 0$ pentru $j \neq k$

$$l_0(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_0-x_1} & \text{dacă} \quad x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{dacă} \quad x \in (x_1, x_n] \end{cases}$$

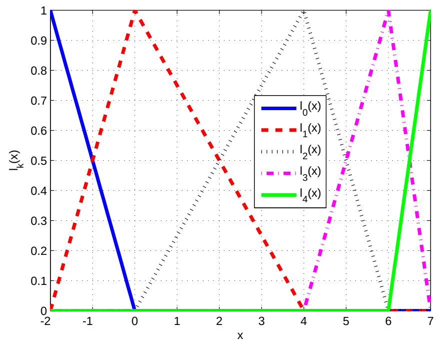
$$l_k(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} & \text{dacă} \quad x \in [x_{k-1}, x_k) \\ \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} & \text{dacă} \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & \text{dacă} \quad x \in [x_1, x_{k-1}) \cup (x_{k+1}, x_n] \end{cases} \quad k = 2, n-1$$

$$l_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & \text{dacă} \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & \text{dacă} \quad x \in [x_0, x_{n-1}) \end{cases}$$

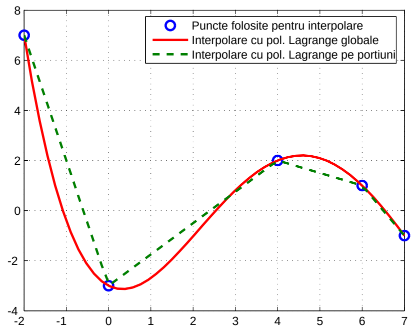
$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k l_k(x) \qquad (14)$$

Notes

Interpolarea liniară pe porţiuni



Polinoame Lagrange pe porţiuni.



Polinoame de interpolare.

Notes

Interpolarea liniară pe porţiuni

<u>`funcţie`</u> interpolare_lpp($n, x, y, xcrt$)
; evaluează polinomul de interpolare liniară pe porţiuni în *xcrt*

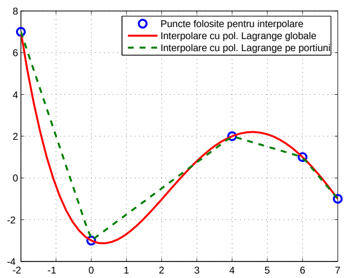
; declaraţii - parametri de intrare
<u>`întreg`</u> n ; dimensiunea problemei - nr. de intervale
<u>`tablou`</u> <u>`real`</u> $x[n], y[n]$; tabelul de valori, indici de la zero
<u>`real`</u> *xcrt* ; punctul de evaluat

k = cauta($n, x, xcrt$)

<u>`întoarce`</u> $(y_{k+1} - y_k)/(x_{k+1} - x_k) * (xcrt - x_k) + y_k$

Notes

Interpolarea liniară pe porţiuni



Dezavantaj:
funcţia de interpolare nu este derivabilă în noduri.
Remediu:
creşterea gradului polinoamelor care se folosesc pe porţiuni.

Notes

Interpolarea Hermite

- interpolarea unei funcţii pe o reţea de noduri x_k în care se cunosc valorile funcţiei y_k şi valorile derivatelor acesteia y'_k.

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_n
y'	y'_0	y'_1	$\cdots$	y'_k	$\cdots$	y'_n

Condiţii de interpolare: $\forall\, k = 0, \ldots, n-1$:

$$\left\{ \begin{array}{r} g(x_k) = y_k, \\ g(x_{k+1}) = y_{k+1}, \\ g'(x_k) = y'_k, \\ g'(x_{k+1}) = y'_{k+1}. \end{array} \right. \tag{15}$$

$\Rightarrow$ polinom de interpolare de gradul 3 pe fiecare subinterval.

Notes

Interpolarea Hermite

$$\begin{aligned} g(x) &= c_{0k} + c_{1k}(x - x_k) + c_{2k}(x - x_k)^2 + c_{3k}(x - x_k)^3, \quad (16)\\ g'(x) &= c_{1k} + 2c_{2k}(x - x_k) + 3c_{3k}(x - x_k)^2, \quad x \in [x_k, x_{k+1}]. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} g(x_k) = y_k, \\ g(x_{k+1}) = y_{k+1}, \\ g'(x_k) = y'_k, \\ g'(x_{k+1}) = y'_{k+1}. \end{array} \right. \quad (17)$$

$\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{0k} = y_k, \\ c_{0k} + c_{1k}(x_{k+1} - x_k) + c_{2k}(x_{k+1} - x_k)^2 + c_{3k}(x_{k+1} - x_k)^3 = y_{k+1}, \\ c_{1k} = y'_k, \\ c_{1k} + 2c_{2k}(x_{k+1} - x_k) + 3c_{3k}(x_{k+1} - x_k)^2 = y'_{k+1}, \end{array} \right.$$

Notes

Interpolarea Hermite

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{0k} = y_k, \\ c_{1k} = y'_k, \\ c_{2k} = \left[3(y_{k+1} - y_k) - (x_{k+1} - x_k)(2y'_k + y'_{k+1})\right] / (x_{k+1} - x_k)^2, \\ c_{3k} = \left[(y'_{k+1} + y'_k) - 2(2y_{k+1} - y_k)/(x_{k+1} - x_k)\right] / (x_{k+1} - x_k)^2. \end{array} \right. \quad (18)$$

Dificultate:
de cele mai multe ori nu se cunosc informaţii despre y'_k.
Soluţie:
Evaluarea derivatelor se poate face numeric (interpolare Bessel):

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}},$$
$$y'_k = \frac{\beta^2 y_{k+1} + (\alpha^2 - \beta^2) y_k - \alpha^2 y_{k-1}}{\alpha\beta(\alpha + \beta)h},$$

$x_{k+1} - x_k = \alpha h$, $x_k - x_{k-1} = \beta h$. Nenatural (ordinul interpolării la formulele de derivare nr.).

Notes

Interpolarea Hermite

Cel mai avantajos: evaluarea derivatelor din impunerea unor condiţii de continuitate suplimentare pentru derivata a doua a polinomului de interpolare în nodurile reţelei de interpolare ⇒ **Interpolare spline cubică clasică** impune

$$g''(x_k - 0) = g''(x_k + 0), \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{19}$$

Deoarece

$$g''(x) = 2c_{2k} + 6c_{3k}(x - x_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}]. \tag{20}$$

⇒

$$2c_{2,k-1} + 6c_{3,k-1}(x_k - x_{k-1}) = 2c_{2k}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{21}$$

⇒

Notes

Interpolarea Hermite

$$\frac{1}{x_k - x_{k-1}} y'_{k-1} + 2\left(\frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_{k+1} - x_k}\right) y'_k + \frac{1}{x_{k+1} - x_k} y'_{k+1} =$$
$$= 3\frac{y_k - y_{k-1}}{(x_k - x_{k-1})^2} + 3\frac{y_{k+1} - y_k}{(x_{k+1} - x_k)^2}. \tag{22}$$

$n-1$ relaţii şi $n+1$ necunoscute.
Pentru unicitate se impun încă două condiţii la capete.

Notes

Interpolarea Hermite

Pentru unicitate se impun încă două condiţii la capete.
Variante:

- **Condiţii forţate la capete:** se impun y_0' şi y_n' ca la interpolarea Bessel
- **Condiţii naturale la capete:**

$$g''(x_0) = 0, \quad g''(x_n) = 0.$$

$\Rightarrow$

$$2y_0' + y_1' = 3\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad y_{n-1}' + 2y_n' = 3\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}. \quad (23)$$

Notes

Interpolarea Hermite

Sistemul de rezolvat pentru evaluarea derivatelor - tridiagonal:

$$2y_0' + y_1' = 3\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

$$\frac{1}{x_k - x_{k-1}} y_{k-1}' + 2\left(\frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_{k+1} - x_k}\right) y_k' + \frac{1}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1}' =$$

$$= 3\frac{y_k - y_{k-1}}{(x_k - x_{k-1})^2} + 3\frac{y_{k+1} - y_k}{(x_{k+1} - x_k)^2},$$

$$y_{n-1}' + 2y_n' = 3\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}.$$

Notes

Interpolarea Hermite

Avantajul interpolării spline cubice clasice:
minimizează curbura pătratică medie a polinomului de intepolare

$$\int_a^b (g''(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$ nu apar oscilaţii nedorite între punctele reţelei de interpolare

Notes

Interpolarea Hermite

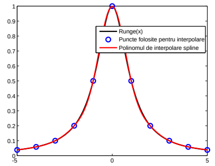
Algoritmul interpolării spline cubice:

<u>funcţie</u> pregăteşte_spline($n, x, y, yder$)
; calculează derivatele funcţiei în nodurile reţelei de discretizare
; declaraţii - parametri de intrare
<u>întreg</u> n ; dimensiunea problemei - numărul de intervale
<u>tablou</u> <u>real</u> $x[n]$, $y[n]$; tabelul de valori, indici de la zero
<u>tablou</u> <u>real</u> $yder[n]$; parametri de ieşire
<u>tablou</u> <u>real</u> $p[n]$, $q[n]$, $r[n]$; matricea tridiagonală asamblată
; asamblează matricea tridiagonală
$q_0 = 2$
$r_0 = 1$
$b_0 = 3(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$
<u>pentru</u> $k = 1, n-1$
 $p_k = 1/(x_k - x_{k-1})$
 $q_k = 2/(x_k - x_{k-1}) + 2/(x_{k+1} - x_k)$
 $r_k = 1/(x_{k+1} - x_k)$
 $b_k = 3(y_k - y_{k-1})/(x_k - x_{k-1})^2 + 3(y_{k+1} - y_k)/(x_{k+1} - x_k)^2$
•
$p_n = 1$
$q_n = 2$
$b_n = 3(y_n - y_{n-1})/(x_n - x_{n-1})$
Gauss_tridiag($n+1, p, q, r, b, yder$)

Notes

Interpolarea Hermite

```
funcţie aproximare_spline(n, x, y, yder, xcrt)
; evaluează polinomul de aproximare spline în punctul xcrt
; declaraţii - parametri de intrare
întreg n                     ; dimensiunea problemei - numărul de intervale
tablou real x[n], y[n], yder[n] tabelul de valori, indici de la zero
real xcrt                    ; punctul de evaluat
k = cauta(n, x, xcrt)
c0k = y_k
c1k = yder_k
h = x_{k+1} − x_k
c2k = (3(y_{k+1} − y_k) − h(2 ∗ yder_k + yder_{k+1}))/h^2
c3k = (yder_{k+1} + yder_k − 2(y_{k+1} − y_k)/h)/h^2
hcrt = xcrt − x_k
întoarce c0k + c1k ∗ hcrt + c2k ∗ hcrt^2 + c3k ∗ hcrt^3
```



Interpolarea *spline* a funcţiei Runge pe o reţea uniformă de puncte.

Notes

Lectură obligatorie

- Pag 162-168 din
  [3] Gabriela Ciuprina - Algoritmi numerici pentru calcule ştiintifice în ingineria electrică, Editura MatrixROM, 2013, disponibil la

  http://lmn.pub.ro/∼gabriela/books/AlgNr_MatrixRom2013.pdf

Notes