

# Rezolvarea ecuațiilor și sistemelor de ecuații diferențiale ordinare

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" București, Facultatea de Inginerie Electrică

Suport didactic pentru disciplina *Metode numerice*, 2017-2018

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Cuprins

- 1 Ecuții diferențiale ordinare
  - Formularea problemei
  - Metoda Euler
  - Exemplu
- 2 Sisteme de ecuații diferențiale ordinare
  - Formularea problemei
  - Metode  $\theta$
  - Metode de ordin superior

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ecuatie diferențială ordinară (ODE)

**Se dau**

$$f : \mathbb{R} \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

**Se cere**

$$x : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

care satisface

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ecuatie diferențială ordinară (ODE)

**Se dau**

$$f : \mathbb{R} \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

**Se cere**

$$x : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

care satisface

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

*Problemă cu o valoare inițială*

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

# Ecuție diferențială ordinară (ODE)

Metoda numerică va furniza un tabel de valori:

$t_0$	$t_1$	$t_2$	$\dots$	$t_n$
$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$

unde  $t_n = T$

Obs:

- De multe ori  $t$  reprezintă *time* și se poate considera  $t_0 = 0$ ;
- Vom nota:  $x(t_j)$  soluția exactă și  $x_j$  aproximația ei

$$x_j \approx x(t_j)$$

- În cele ce urmează vom pp:  $t_j - t_{j-1} = h \Leftrightarrow t_k = t_0 + jh$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

# Metoda Euler explicită

Dezvoltarea în serie Taylor în jurul lui  $t_j$

$$x(t_j + h) = x(t_j) + \frac{h}{1!}x'(t_j) + \frac{h^2}{2!}x''(t_j) + \dots \quad (3)$$

Formula Taylor

$$x(t_j + h) = x(t_j) + \frac{h}{1!}x'(t_j) + \frac{h^2}{2!}x''(\zeta) \quad (4)$$

$$x(t_j + h) = x(t_j) + hf(x(t_j), t_j) + O(h^2) \quad (5)$$

Dacă am presupune că valoarea la iterația  $j$  a fost calculată exact  $x_j = x(t_j)$  atunci

$$x(t_j + h) = x_j + hf(x_j, t_j) + O(h^2) \quad (6)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metoda Euler explicită

Dacă am presupune că valoarea la iterația  $j$  nu este afectată de erori  $x_j = x(t_j)$  atunci

$$x(t_j + h) = x_j + hf(x_j, t_j) + O(h^2)$$

Dacă adoptăm ca formulă de calcul (Euler explicit)

$$x_{j+1} = x_j + hf(x_j, t_j) \quad (7)$$

atunci *eroarea locală* la iterația  $j$  este

$$e_j = |x(t_{j+1}) - x_{j+1}| = O(h^2) \quad (8)$$

## Metoda Euler explicită

Dacă am presupune că valoarea la iterația  $j$  nu a fost calculată exact  $x(t_j) = x_j + e_{x_j}$  atunci

$$x(t_j + h) = x_j + e_{x_j} + hf(x_j, t_j) + O(h^2)$$

Dacă adoptăm ca formulă de calcul (Euler explicit)

$$x_{j+1} = x_j + hf(x_j, t_j) \quad (9)$$

atunci *eroarea locală* este

$$e_{x_{j+1}} = |x(t_{j+1}) - x_{j+1}| = e_{x_j} + O(h^2) \quad (10)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metoda Euler explicită

**Eroarea globală** este eroarea la ultimul moment de timp

$$\begin{aligned} e_g &= |x(t_n) - x_n| = e_{x_n} + O(h^2) = e_{x_{n-1}} + O(h^2) + O(h^2) = \\ &= nO(h^2) = \frac{T - t_0}{h} O(h^2) = O(h) \end{aligned} \quad (11)$$

## Metoda Euler explicită

O altă variantă de deducere a relației de calcul

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) \quad (12)$$

- Se scrie ecuația la momentul de timp discret  $t_j$ ;
- Pentru derivată: **formulă de diferențe finite progresive de ordinul 1**

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{h} = f(x_j, t_j) \Rightarrow \quad (13)$$

$$x_{j+1} = x_j + hf(x_j, t_j) \quad (14)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metoda Euler explicită

O altă variantă de deducere a relației de calcul

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) \quad (12)$$

- Se scrie ecuația la momentul de timp discret  $t_j$ ;
- Pentru derivată: **formulă de diferențe finite progresive de ordinul 1**

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{h} = f(x_j, t_j) \Rightarrow \quad (13)$$

$$x_{j+1} = x_j + hf(x_j, t_j) \quad (14)$$

Folosirea seriei Taylor este utilă pentru estimarea erorii de trunchiere.

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metoda Euler explicită - algoritm

**procedură Euler\_explicit** ( $x_{\text{init}}, t_0, T, h, x$ )

**real**  $x_{\text{init}}$

**real**  $t_0, T$

**real**  $h$

$n = \lceil (T - t_0)/h \rceil$

**tablou real**  $t[n + 1]$

**tablou real**  $x[n + 1]$

$t_0 = t_0$

$x_0 = x_{\text{init}}$

**pentru**  $j = 0, n - 1$

$x_{j+1} = x_j + hf(x_j, t_j)$

$t_{j+1} = t_j + h$

•

**retur**

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metoda Euler implicită

Derivata: formulă de diferențe finite regresive de ordinul 1

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) \quad (15)$$

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{h} = f(x_j, t_j) \Rightarrow \quad (16)$$

$$x_j = x_{j-1} + hf(x_j, t_j) \quad (17)$$

## Metoda Euler implicită

Derivata: formulă de diferențe finite regresive de ordinul 1

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) \quad (15)$$

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{h} = f(x_j, t_j) \Rightarrow \quad (16)$$

$$x_j = x_{j-1} + hf(x_j, t_j) \quad (17)$$

Relația este implicită, la fiecare pas se rezolvă o ecuație algebrică neliniară pentru determinarea mărimii  $x_j$

*Metoda Euler implicită*

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metoda Euler implicită

Derivata: formulă de diferențe finite regresive de ordinul 1

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) \quad (15)$$

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{h} = f(x_j, t_j) \Rightarrow \quad (16)$$

$$x_j = x_{j-1} + hf(x_j, t_j) \quad (17)$$

Relația este implicită, la fiecare pas se rezolvă o ecuație algebrică neliniară pentru determinarea mărimii  $x_j$

*Metoda Euler implicită*

Și în acest caz

$$e_l = O(h^2) \quad e_g = O(h)$$

## Metoda Euler implicită

$$x_j = x_{j-1} + hf(x_j, t_j) \quad (18)$$

Ecuația neliniară de rezolvat:  $F(x) = 0$ , unde

$$F(x) = x - x_{j-1} - hf(x, t_j)$$

- **Iterații simple:**

$$x^{(n)} = x^{(v)} + cF(x^{(v)}) \quad \text{aici} \quad x^{(n)} = x_j^{(n)} \quad x^{(v)} = x_j^{(v)}$$

$$x_j^{(n)} = x_j^{(v)} + c(x_j^{(v)} - x_{j-1} - hf(x_j^{(v)}, t_j))$$

De exemplu, dacă  $c = -1$

$$x_j^{(n)} = x_{j-1} + hf(x_j^{(v)}, t_j)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



## Metoda Euler implicită

$$x_j = x_{j-1} + hf(x_j, t_j) \quad (18)$$

Ecuatia neliniară de rezolvat:  $F(x) = 0$ , unde

$$F(x) = x - x_{j-1} - hf(x, t_j)$$

• **Newton:**

$$x^{(n)} = x^{(v)} + cF(x^{(v)}) \quad \text{aici} \quad x^{(n)} = x_j^{(n)} \quad x^{(v)} = x_j^{(v)}$$

$$c = -1/F'(x^{(v)}) \quad \text{unde} \quad F'(x) = 1 - h \frac{\partial f}{\partial x}(x, t_j)$$

$$x_j^{(n)} = x_j^{(v)} - \frac{x_j^{(v)} - x_{j-1} - hf(x_j^{(v)}, t_j)}{1 - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_j^{(v)}, t_j)}$$

12/31

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metoda Euler implicită

- La fiecare pas de timp se rezolvă o ecuație neliniară;
- Inițializarea rezolvării ecuației neliniare - de exemplu cu soluția de la Euler explicit;
- Eroarea și numărul maxim admis de iterații pentru procedura neliniară - trebuie să fie parametri de intrare pentru Euler implicit;
- Dacă  $f$  este o funcție liniară, atunci  $F(x) = 0$  este o ecuație liniară, soluția se poate calcula explicit.
- **Metoda Euler este o metodă într-un pas, de ordinul 1.**  
Metoda într-un pas = valoarea la un moment de timp se calculează în funcție de o valoare la un singur moment de timp anterior;  
Ordinul metodei = se referă la ordinul erorii globale, aici  $e_g = O(h)$ .

13/31

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metoda Euler implicită

```
procedură Euler_implicit (xinit,t0,T,h,err,maxit,x)
real xinit
real t0, T
real h
real err
întreg maxit
n = [(T - t0)/h]
tablou real t[n + 1]
tablou real x[n + 1]
t0 = t0
x0 = xinit
....
```

## Metoda Euler implicită

```
procedură Euler_implicit (xinit,t0,T,h,err,maxit,x)
....
pentru j = 0, n - 1
    xn = xj + hf(xj, tj) ; inițializare ca la Euler explicit
    ; iteratii simple (c=-1)
    k = 0
    repetă
        xv = xn
        xn = xj + hf(xv, tj)
        k = k + 1
        d = |xv - xn|
    până când (d < err) sau k > maxit
    dacă k > maxit scrie procedura neliniară neconvergentă
    tj+1 = tj + h
    xj+1 = xn
retur
```

sau cu Newton:

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metoda Euler implicită

**procedură Euler\_implicit** (xinit,t0,T,h,err,maxit,x)

....

**pentru**  $j = 0, n - 1$

$x_n = x_j + hf(x_j, t_j)$  ; inițializare ca la Euler explicit

; **Newton**

$k = 0$

**repetă**

$xv = xn$

$xn = x_j - (xv - x_{j-1} - hf(xv, t_j)) / (1 - h \cdot f_{der}(xv, t_j))$

$k = k + 1$

$d = |xv - xn|$

**până când** ( $d < err$ ) **sau**  $k > maxit$

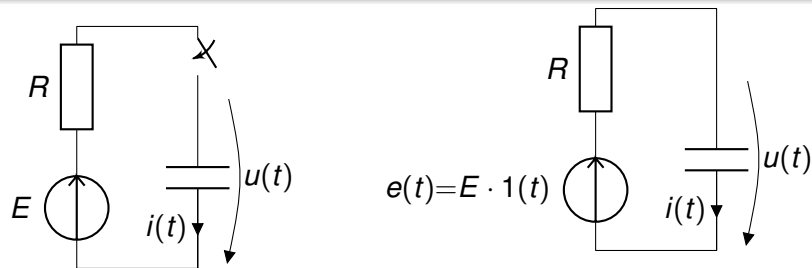
**dacă**  $k > maxit$  **scrie** procedura neliniară neconvergentă

$t_{j+1} = t_j + h$

$x_{j+1} = xn$

**retur**

## Exemplu



$C = 4\mu\text{F}$ ,  $E = 20\text{ mV}$ ,  $R = 10\ \Omega$ ,  $u(0) = 0$ .

$$Ri(t) + u(t) = E \quad i(t) = C \frac{du(t)}{dt}, \quad (19)$$

$$RC \frac{du(t)}{dt} + u(t) = E. \quad u(0) = u_0 = 0. \quad (20)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

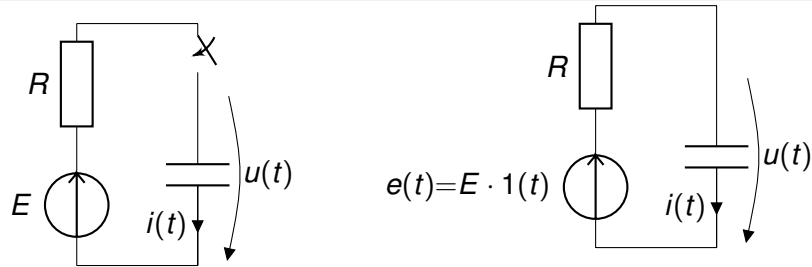
---

---

---

---

## Exemplu



Soluție analitică

$$u(t) = (u_0 - E) \exp(-t/\tau) + E. \quad (19)$$

unde  $\tau = RC$  este *constanta de timp* a circuitului.

## Exemplu

Ecuția (20) o rescriem ca

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} u(t) = \frac{1}{\tau} E. \quad (20)$$

Vom urmări calculul numeric în intervalul de timp  $[0, t_{max}]$  unde  $t_{max} = 10\tau$  într-o rețea echidistantă de  $N$  puncte  $t_k$ , unde **pasul de discretizare  $h$**  este

$$t_{k+1} - t_k = h, \quad \text{pentru } k = 1, \dots, N - 1. \quad (21)$$

Vom nota valorile discrete obținute prin rezolvare numerică cu  $u_k$ . Ele vor fi aproximații ale mărimii reale  $u$ .

$$u_k \approx u(t_k). \quad (22)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Exemplu

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{1}{\tau}E. \quad (23)$$

Varianta I - Euler explicit (dif. finite progresive de ord. 1)

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} + \frac{1}{\tau}u_k = \frac{1}{\tau}E, \quad (24)$$

$\Rightarrow u_{k+1}$  poate fi calculată explicit cu formula

$$u_{k+1} = u_k \left(1 - \frac{h}{\tau}\right) + \frac{h}{\tau}E. \quad (25)$$

## Exemplu

$$u_{k+1} = u_k \left(1 - \frac{h}{\tau}\right) + \frac{h}{\tau}E. \quad (26)$$

```
procedură euler_explicit_RC(u0,E,tau,h,N,u)
; rezolvă ecuația  $\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{1}{\tau}E$  cu metoda diferențelor finite
; d/dt se discretizează folosind diferențe progresive de ordinul 1
real u0           ; condiția inițială - dată
real E           ; coeficient în ecuație - dată
real tau        ; constantă de timp - dată
real h           ; pas de discretizare al intervalului de timp - dat
intreg N        ; număr de valori de timp - dat
tablou real u[N] ; soluția discretă - rezultat
u(1) = u0
pentru k = 1,N-1
    u(k+1) = u(k)*(1-h/tau) + h*E/tau
•
retur
```

Această metodă, este instabilă pentru  $h > \tau$ .

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Exemplu

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{1}{\tau}E. \quad (27)$$

Varianta a II-a - Euler implicit (dif. finite regresive de ord. 1)

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{h} + \frac{1}{\tau}u_k = \frac{1}{\tau}E, \quad (28)$$

$\Rightarrow u_k$  poate fi calculată explicit:

$$u_k = \left(u_{k-1} + \frac{h}{\tau}E\right) / \left(1 + \frac{h}{\tau}\right). \quad (29)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Exemplu

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{1}{\tau}E. \quad (27)$$

Varianta a II-a - Euler implicit (dif. finite regresive de ord. 1)

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{h} + \frac{1}{\tau}u_k = \frac{1}{\tau}E, \quad (28)$$

$\Rightarrow u_k$  poate fi calculată explicit:

$$u_k = \left(u_{k-1} + \frac{h}{\tau}E\right) / \left(1 + \frac{h}{\tau}\right). \quad (29)$$

În acest caz nu este nevoie de rezolvarea unei ecuații neliniare

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

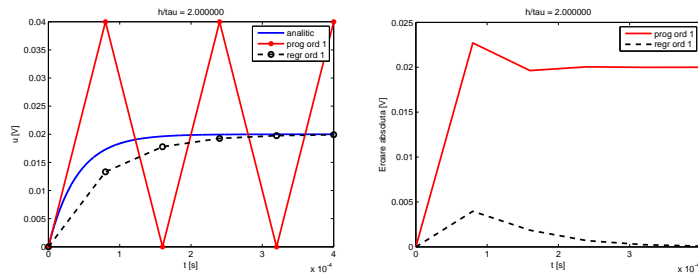
## Exemplu

$$u_k = \left( u_{k-1} + \frac{h}{\tau} E \right) / \left( 1 + \frac{h}{\tau} \right). \quad (30)$$

```

procedură euler_implicit_RC(u0,E,tau,h,N,u)
; rezolvă ecuația  $\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{1}{\tau}E$  cu metoda diferențelor finite
; d/dt se discretizează folosind diferențe regresive de ordinul 1
real u0           ; condiția inițială - dată
real E           ; coeficient în ecuație - dată
real tau        ; constantă de timp - dată
real h          ; pas de discretizare al intervalului de timp - dat
întreg N        ; număr de valori de timp - dat
tablou real u[N] ; soluția discretă - rezultat
u(1) = u0
pentru k = 2,N
    u(k) = (h*E/tau + u(k-1))/(1 + h/tau)
• retur
    
```

## Exemplu



Cazul  $h = 2\tau$ .

## Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

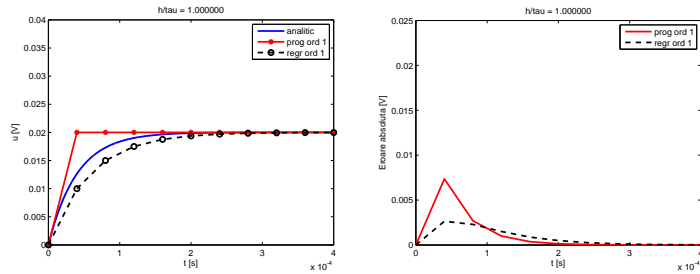
---

---

---

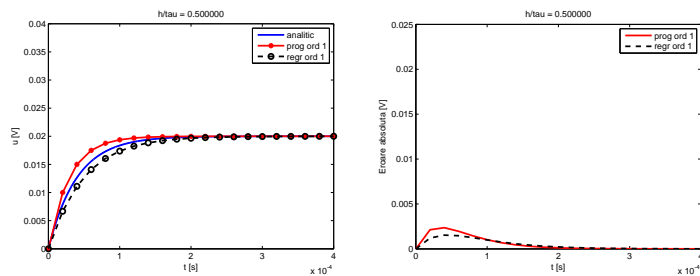
---

# Exemplu



Cazul  $h = \tau$ .

# Exemplu



Cazul  $h = \tau/2$ .

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---





## Metode în $m$ pași

$$\sum_{i=0}^m \rho_i \mathbf{x}_{n+i} = h \sum_{i=0}^m \sigma_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+i}, t_{n+i}), \quad (35)$$

unde  $h = t_{n+m} - t_{n+m-1}$ .

$\rho_m = 1$ , iar coeficienților  $\rho_i$  și  $\sigma_i$  sunt aleși astfel încât procedeul să fie convergent.

- Dacă  $\sigma_m = 0$ , atunci calculul valorii noi  $x_{n+m}$  se face explicit;
- Dacă  $\sigma_m \neq 0$ , atunci calculul valorii noi  $x_{n+m}$  se face implicit și necesită rezolvarea unei ecuații algebrice, în general neliniare.

## Metode într-un pas

Metode într-un pas:  $m = 1$

$$-\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1} = h [\sigma_0 \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n) + \sigma_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1})], \quad (36)$$

unde  $\rho_0 = -1$  din motive de convergență.

Dacă notăm  $\sigma_0 = \theta$  și  $\sigma_1 = 1 - \theta$ , aceste metode cu un pas se numesc **metode  $\theta$** .

În particular, și renotând  $n$  cu  $k - 1$ , există următoarele scheme de calcul celebre

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metode într-un pas - metode $\theta$

- Metoda Euler explicită (sau progresivă)  $\theta = 1$ :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + hf(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}) \quad (37)$$

unde  $h = t_k - t_{k-1}$ . (Derivata din sistemul de ecuații: diferențe finite progresive de ordinul 1).

- Metoda Euler implicită (sau regresivă)  $\theta = 0$ :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + hf(\mathbf{x}_k, t_k) \quad (38)$$

unde  $h = t_k - t_{k-1}$ . (Derivata din sistemul de ecuații: diferențe finite regresive de ordinul 1.)

- Metoda trapezelor  $\theta = 1/2$ :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \frac{h}{2} (f(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}) + f(\mathbf{x}_k, t_k)) \quad (39)$$

unde  $h = t_k - t_{k-1}$ .

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metode într-un pas - metode $\theta$

Justificarea numelui metodei trapezelor.

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(t'), t') dt' \quad (40)$$

Considerând momentele discrete  $t_{k-1}$  și  $t_k$  are loc

$$\mathbf{x}(t_k) = \int_{t_0}^{t_{k-1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) dt. \quad (41)$$

Schema de calcul va înlocui valorile exacte cu unele aproximative, în consecință

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metode într-un pas - metode $\theta$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + I, \quad (42)$$

unde  $I$  reprezintă o aproximare pentru integrala  $\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) dt$ .  
Dacă  $\mathbf{f}$  - funcție scalară  $\rightarrow$  cea mai simplă aproximare a integralei = aria trapezului corespunzător intervalului  $[t_{k-1}, t_k] \rightarrow$  (39).

Metoda trapezelor este de ordinul 2.

## Metode într-un pas de ordin superior

Dacă pentru  $I$  se aleg scheme numerice mai rafinate și mai eficiente, care conduc la iterații în timp de tipul

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + h \sum_{j=1}^{\nu} b_j \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{k-1} + c_j h), t_{k-1} + c_j h). \quad (43)$$

Într-o astfel de formulă, valorile  $\mathbf{x}(t_{k-1} + c_j h)$  nu sunt cunoscute. Aproximarea lor prin combinații liniare ale unor valori calculate succesiv conduce la scheme de tip *Runge-Kutta* cu  $\nu$  etape.

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Metode multi-pas de ordin superior

O altă variantă a schemelor multipas date de (35) este cea în care  $\sigma_i = 0$  pentru orice  $i < m$ .

Se numesc scheme **BDF** (*backward differentiation formula*):

$$\sum_{i=0}^{m-1} \rho_i \mathbf{x}_{n+i} + \mathbf{x}_{n+m} = h \sigma_m \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+m}, t_{n+m}) \quad (44)$$

unde  $h = t_{n+m} - t_{n+m-1}$ .

Renotând  $n + m$  cu  $k$ , modul de calcul al soluției la iterația  $k$  în funcție de  $m$  pași anteriori este

$$\mathbf{x}_k - h \sigma_m \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) = - \sum_{i=0}^{m-1} \rho_i \mathbf{x}_{k-m+i} \quad (45)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Lectură obligatorie

### ● Cap.10 din

[1] Gabriela Ciuprina, Mihai Rebican, Daniel Ioan - Metode numerice in ingineria electrica - Indrumar de laborator pentru studentii facultatii de Inginerie electrica, Editura Printech, 2013, disponibil la

[http://mn.lmn.pub.ro/indrumar/IndrumarMN\\_Printech2013.pdf](http://mn.lmn.pub.ro/indrumar/IndrumarMN_Printech2013.pdf)

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---