# Rezolvarea ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii algebrice neliniare

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" Bucureşti, Facultatea de Inginerie Electrică

Suport didactic pentru disciplina *Metode numerice*, 2017-2018



Notes



## Cuprins





Notes

# Formularea problemei

**Enunţ**

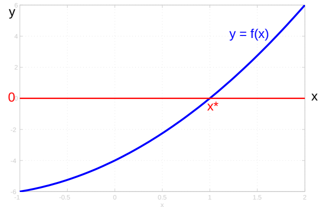
Se dă $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$, continuă.
Se cere $x$ pentru care

$$f(x) = 0$$

**Buna formulare matematică**

Există o soluţie $x^* \in [a, b]$ şi aceasta este unică.

$$f(x^*) = 0$$



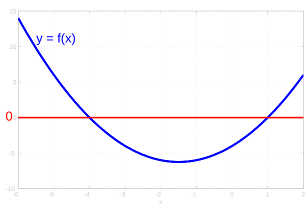


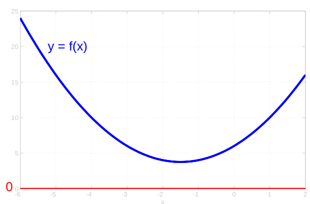

Notes



# Formularea problemei

Exemple de probleme prost formulate:



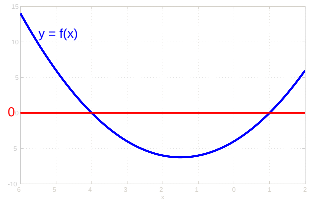



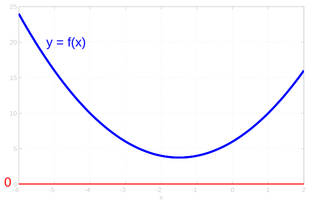



Notes

# Formularea problemei

Exemple de probleme prost formulate:




Soluţia nu este unică.

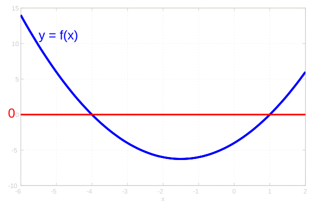


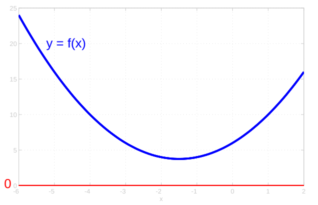
Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Enunţ şi buna formulare
Exemple

# Formularea problemei

Exemple de probleme prost formulate:



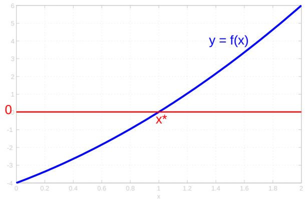

Soluţia nu este unică. Nu există soluţie.

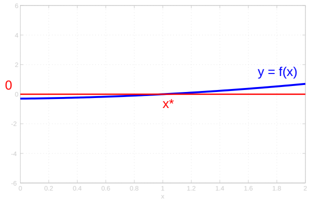


Notes

## Condiţionarea problemei

Condiţionarea depinde de panta lui $f$ în apropierea soluţiei.



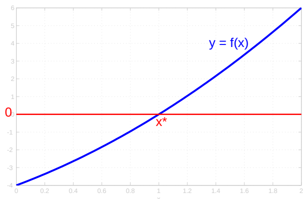


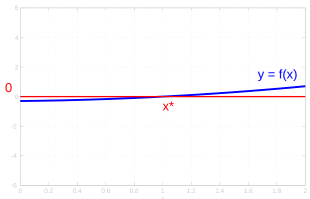

Notes



## Condiţionarea problemei

Condiţionarea depinde de panta lui $f$ în apropierea soluţiei.



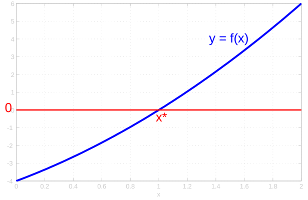

Bine condiţionată.

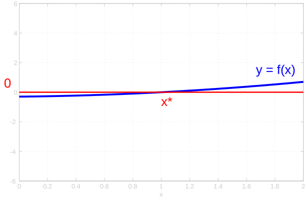


Notes

## Condiţionarea problemei

Condiţionarea depinde de panta lui $f$ în apropierea soluţiei.




Bine condiţionată. Prost condiţionată.



Notes



## Condiţionarea problemei

Numărul de condiţionare (revedeţi cursul despre erori):

*Formulare implicită*

$$f(x) = y$$

($y$ - date, $x$ - rezultat), aici $y = 0$

*Formulare explicită*

$$x = g(y)$$

($g = f^{-1}$)

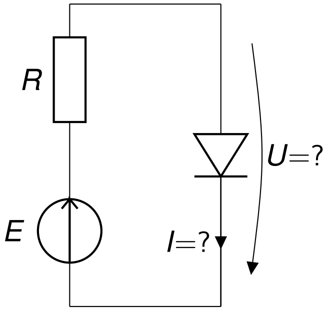
$$\hat{k} = \|J(g(y))\| = |g'(y)| = \frac{1}{|f'(x)|}$$

Dacă $|f'(x^*)| \approx 0 \Rightarrow \hat{k}$ e mare $\Rightarrow$ prost condiţionată.



Notes

## Exemplul 1




Se dau: $E$, $R$ şi caracteristica diodei $i = g(u)$

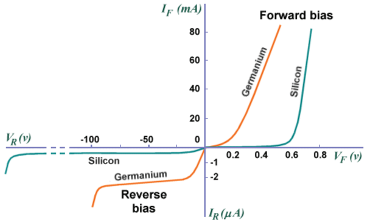



Figura este preluată de la

https://www.technologyuk.net/physics/

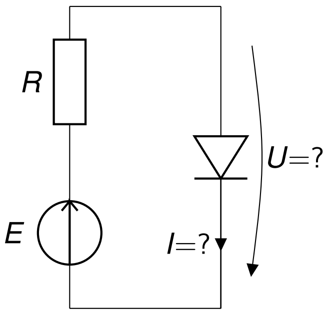
Se cere: punctul static de functionare al diodei $(I, U)$



Notes



## Exemplul 1




$$\begin{aligned} u &= -Ri + E \\ i &= g(u) \end{aligned}$$

$$u + Rg(u) - E = 0$$

$$f(u) = 0$$

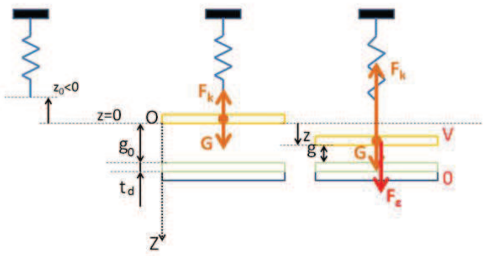
unde

$$f(u) = u + Rg(u) - E$$



Notes

## Exemplul 2




Se dau:
$g_0$, $A$, $t_d$
$k$, $\varepsilon_r$
$V$
Se cere: $g$

$$k(g_0 - g) = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2\left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r}\right)^2}$$

$$f(g) = 0$$

unde

$$f(g) = (g - g_0)\left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r}\right)^2 + \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2k}$$



Notes



## Metoda bisecţiei - ideea

Ipoteză suplimentară:

$$f(a)f(b) < 0$$

Ideea

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Prin înjumătăţirea intervalului:

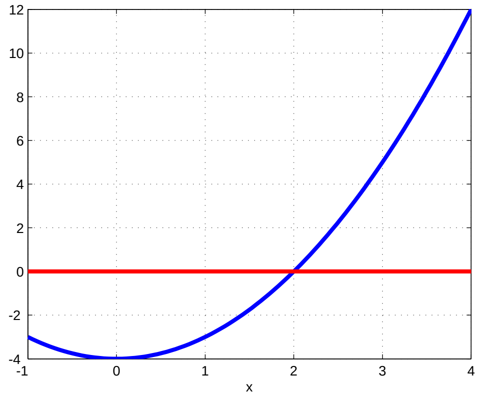
1. $x_m = (a+b)/2$
2. se va selecta dintre intervalele $[a, x_m]$ şi $[x_m, b]$ pe acela care conţine soluţia
3. se renotează cu $[a, b]$ jumătatea aleasă şi se reia de la pasul 1.

Algoritmul se opreşte atunci când $|b - a| < \varepsilon$
$\varepsilon$ este o eroare absolută impusă de utilizator.



Notes

## Metoda bisecţiei - ideea

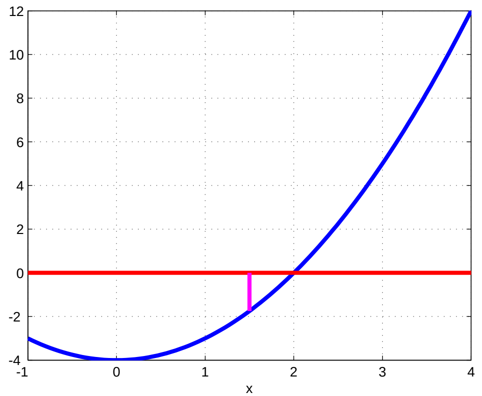





Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

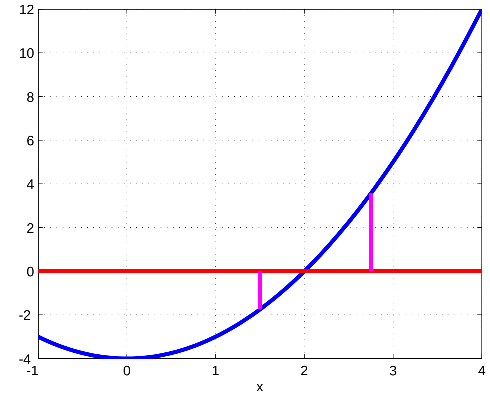
## Metoda bisecţiei - ideea




10/43
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

# Metoda bisecţiei - ideea

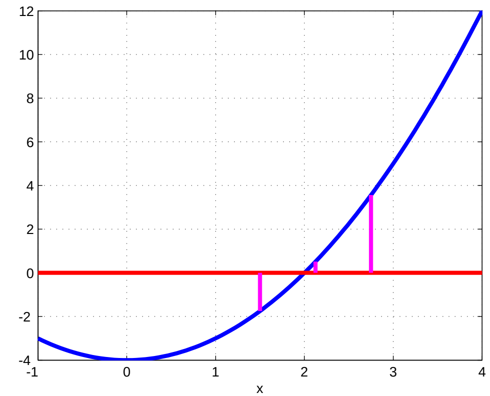





Notes



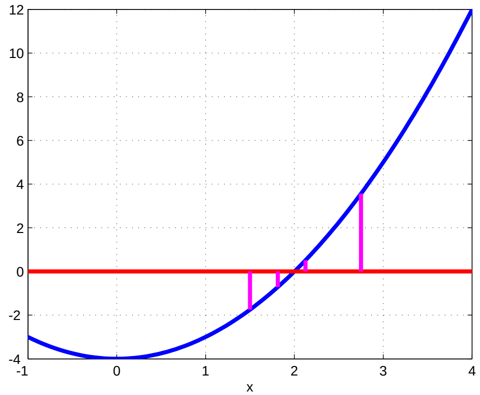
# Metoda bisecţiei - ideea






Notes

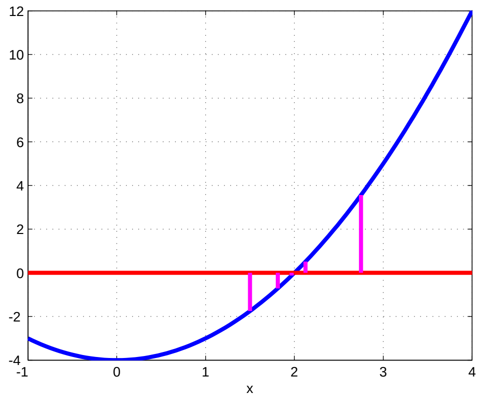
## Metoda bisecţiei - ideea






Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor
Metoda bisecţiei - ideea




10/43
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare
Notes

## Metodei bisecţiei - algoritm

**funcţie** bisecţie ($a$, $b$, $eps$, $nit$)
    **real** $a, b$ ; domeniul de definiţie al funcţiei f
    **real** $\varepsilon$ ; eroarea impusă
    **întreg** $nit$ ; număr maxim de iteraţii
    **real** $xm$ ; soluţia
    **întreg** $k = 0$ ; contor iteraţii
    **repetă**
        $k = k + 1$
        $xm = (a + b)/2$
        **dacă** $f(xm)f(a) > 0$ **atunci**
            $a = xm$
        **altfel**
            $b = xm$
    **până când** $(b - a) < eps$ **sau** $k > nit$
    **dacă** $k > nit$
        **scrie** Eroarea impusă nu a fost atinsă.
    **întoarce** $xm$ ; soluţie
**retur**



Notes



## Metoda bisecţiei - erori

La fiecare iteraţie, eroarea absolută se înjumătăţeste:

$$\begin{aligned}
|x_0 - x^*| &< l \\
|x_1 - x^*| &< l/2 \\
|x_2 - x^*| &< l/2^2 \\
&\vdots \\
|x_k - x^*| &< l/2^k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$l = b - a$

În ipotezele făcute, procedura este garantat convergentă!



Notes

## Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \rightarrow x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \qquad (2)$$

$g$ se numeşte *funcţie de iteraţie*



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor
Ideea metodei iteraţiei simple
Ecuaţia de rezolvat:
$$f(x) = 0 \qquad (1)$$
Ideea:
$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \rightarrow x^*$$
Calcul recursiv:
$$x_k = g(x_{k-1}), \qquad (2)$$
$g$ se numeşte *funcţie de iteraţie*

1. $g = ?$

13/43
Gabriela Ciuprina Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

## Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \tag{2}$$

$g$ se numeşte *funcţie de iteraţie*

1. $g = ?$
2. $x_0 = ?$



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

## Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \tag{2}$$

$g$ se numeşte *funcţie de iteraţie*

1. $g = ?$
2. $x_0 = ?$
3. Şirul este convergent?



Notes

## Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \rightarrow x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \quad (2)$$

$g$ se numeşte *funcţie de iteraţie*

1. $g = ?$
2. $x_0 = ?$
3. Şirul este convergent?
4. Care este criteriul de oprire?



Notes

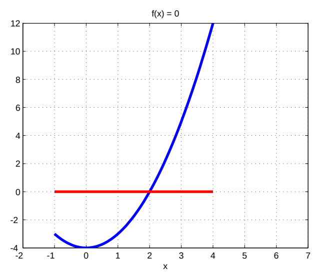


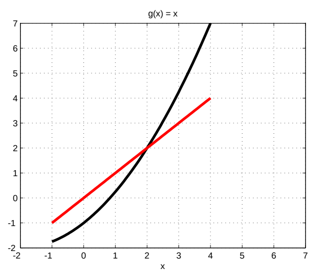
## Metoda iteraţiei simple - construcţia lui $g$

$$x_k = g(x_{k-1}), \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x \quad (3)$$

$$x = g(x) \quad (4)$$

Soluţia ecuaţiei $f(x) = 0$ este punct fix al aplicaţiei $g$






Notes

# Metoda iteraţiei simple - construcţia lui $g$

$$f(x) = 0$$



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

# Metoda iteraţiei simple - construcţia lui $g$

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$



Notes

## Metoda iteraţiei simple - construcţia lui $g$

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$

$$x + cf(x) = x$$



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

## Metoda iteraţiei simple - construcţia lui $g$

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$

$$x + cf(x) = x$$

$$g(x) = x + cf(x) \tag{5}$$



Notes

## Metoda iteraţiei simple - construcţia lui $g$

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$

$$x + cf(x) = x$$

$$g(x) = x + cf(x) \tag{5}$$

$$x_k = x_{k-1} + cf(x_{k-1}) \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$



Notes



## Metoda iteraţiei simple - convergenţa

$$g(x) = x + cf(x) \tag{7}$$

$$x_k = x_{k-1} + cf(x_{k-1}) \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Iniţializare arbitrară $x_0 \in [a, b]$.
Obs: Constanta $c$ influenţază puternic convergenţa.

**Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă**

Dacă $g$ este o contratie, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

$g$ este contracţie, dacă:

$$|g(x_1) - g(x_2)| < |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in [a, b] \tag{9}$$



Notes

## Metoda iteraţiei simple - convergenţa

$$g(x) = x + cf(x) \tag{7}$$

$$x_k = x_{k-1} + cf(x_{k-1}) \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Iniţializare arbitrară $x_0 \in [a, b]$.
Obs: Constanta $c$ influenţază puternic convergenţa.

**Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă**

Dacă $g$ este o contratie, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

$g$ este contracţie, dacă:

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in [a, b] \tag{9}$$

$L < 1$ (strict!)



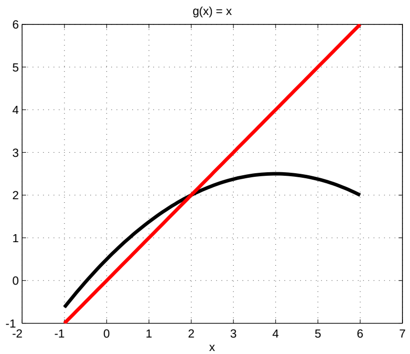
Notes



## Metoda iteraţiei simple - convergenţa

**Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă**

Dacă $f$ este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.




Convergent

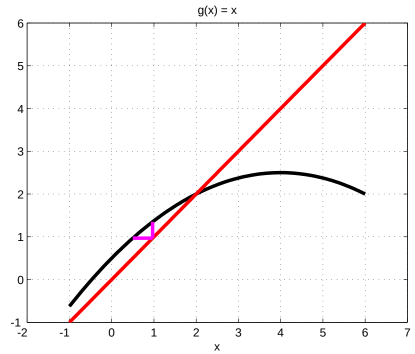


Notes

## Metoda iteraţiei simple - convergenţa

**Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă**

Dacă $f$ este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.




Convergent



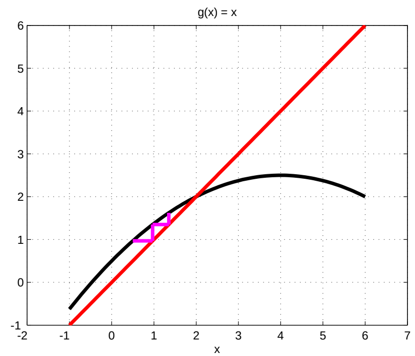
Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă $f$ este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.




Convergent

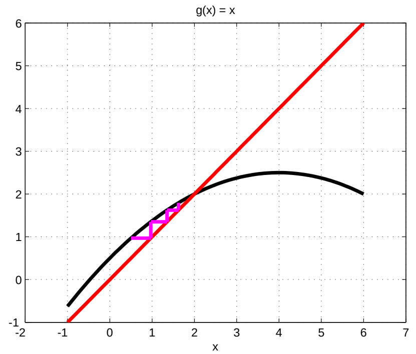
17/43
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

# Metoda iteraţiei simple - convergenţa

**Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă**

Dacă $f$ este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.




Convergent



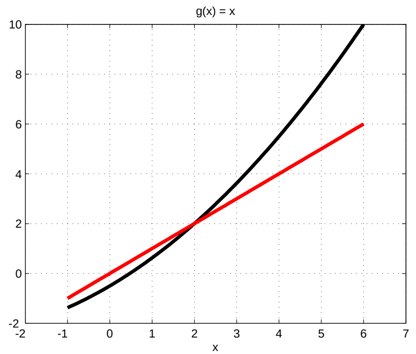
Notes



# Metoda iteraţiei simple - convergenţa

**Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă**

Dacă $f$ este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.




Divergent

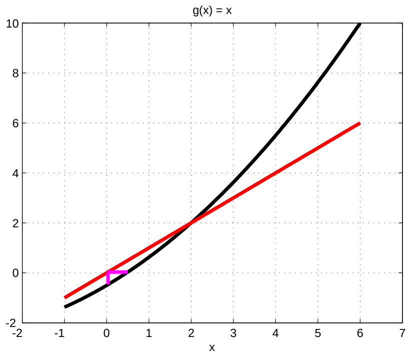


Notes

## Metoda iteraţiei simple - convergenţa

**Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă**

Dacă $f$ este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.




Divergent



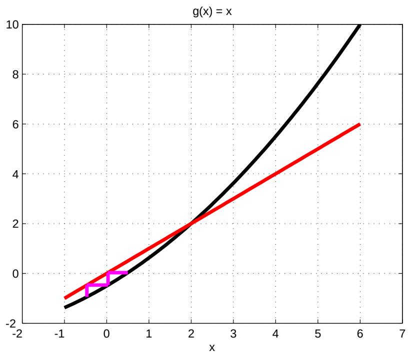
Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

## Metoda iteraţiei simple - convergenţa

**Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă**

Dacă $f$ este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.




Divergent

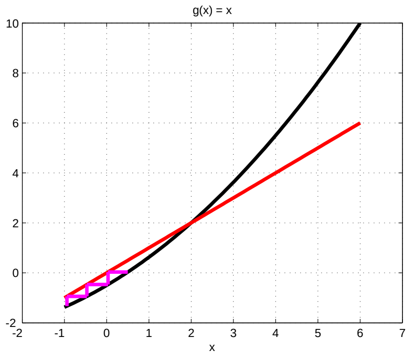
17/43
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

# Metoda iteraţiei simple - convergenţa

**Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă**

Dacă $f$ este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.




Divergent



Notes



# Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Condiţia $|g'| < 1$ este echivalentă cu:

$$|1 + cf'(x)| < 1, \quad x \in [a, b]. \tag{10}$$

$\Rightarrow$ importanţa constantei $c$

Cu cât $|g'| = |1 + cf'(x)|$ este mai mic, cu atât şirul iterativ este mai rapid convergent.

Notăm $L$ o margine a derivatei $|g'|(x) \leq L$.

$$|x_1 - x^*| = |g(x_0) - g(x^*)| = |g'(\zeta)(x_0 - x^*)| \leq L|x_0 - x^*|$$

$$|x_2 - x^*| \leq L|x_1 - x^*| \leq L^2|x_0 - x^*|$$

$$|x_3 - x^*| \leq L|x_2 - x^*| \leq L^3|x_0 - x^*|$$

$$\vdots$$

$$|x_k - x^*| \leq L^k|x_0 - x^*| \tag{11}$$



Notes

## Metoda iteraţiei simple - condiţia de oprire

Eroarea $|x_n - x^*|$ - nu se poate calcula
Reziduul $|f(x_n)|$ - se poate calcula, dar trebuie corelat cu numărul de condiţionare

$$f(x_n) - f(x^*) = f'(\zeta)(x_n - x^*)$$

$$|x_n - x^*| = \frac{1}{f'(\zeta)}|f(x_n)|$$

$$|x_n - x^*| \leq \hat{k}|f(x_n)|$$



Notes



## Metoda iteraţiei simple - condiţia de oprire

Dar

$$|x_n - x_{n-1}| = |g(x_{n-1}) - x_{n-1}| = |x_{n-1} + cf(x_{n-1}) - x_{n-1}| = |cf(x_{n-1})|$$

Dacă $c$ e corelat cu inversa derivatei, atunci cel mai natural criteriu de oprire este

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

unde $\varepsilon$ este parametru de intrare (impus de utilizator).



Notes

## Metoda Newton

$c$ se alege a.î. viteza de convergenţă să fie maximă:

$$1 + c_k f'(x_k) = 0$$

$$c_k = -\frac{1}{f'(x_k)}. \tag{12}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

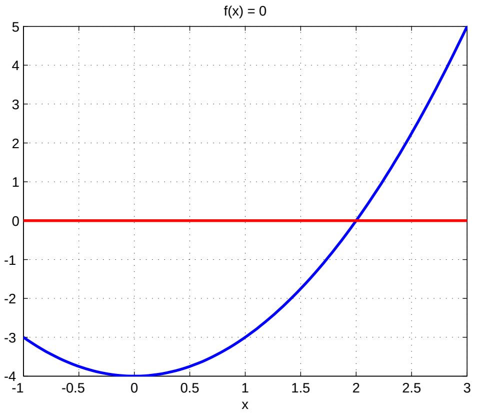
Semnificaţie geometrică: La fiecare iteraţie graficul funcţiei este aproximat cu tangenta dusă în punctul de coordonate $x_k, f(x_k)$.
OBS: Metoda eşuează dacă tangenta are panta zero.



Notes



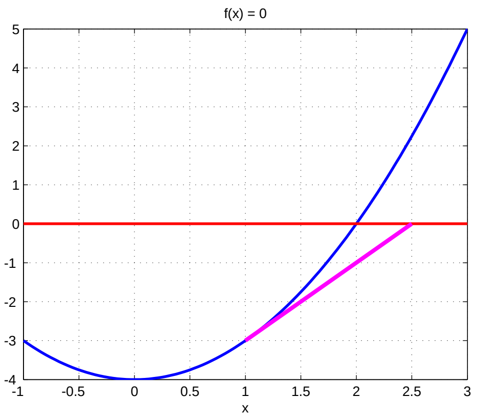
## Metoda Newton






Notes

# Metoda Newton

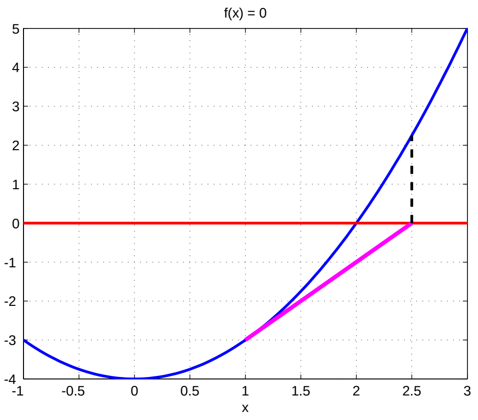





Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

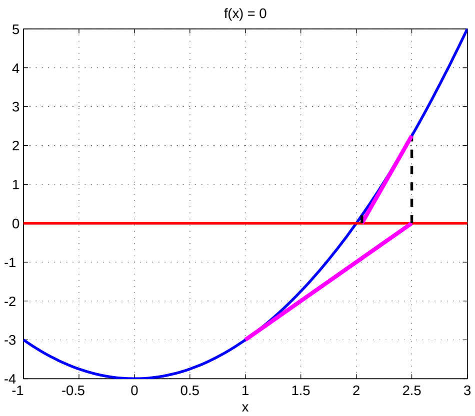
# Metoda Newton






Notes

# Metoda Newton

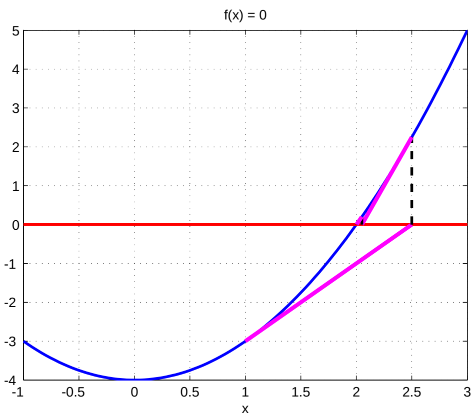





Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda Newton




22/43
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

## Metoda Newton

Justificare: Ecuaţia dreptei tangente:

$$y = f'(x)(x - x_k) + f(x_k), \tag{14}$$

Intersecţia tangentei cu axa orizontală:

$$y = 0 \Rightarrow x = x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Obs: la fiecare iteraţie trebuie evaluată derivata $f'(x_k)$, ceea ce poate necesita un efort mare de calcul.
:(
Ce se poate face pentru diminuarea efortului de calcul?



Notes



## Metoda tangentelor paralele

Variantă simplificată metoda **Newton-Kantorovici (a tangentelor paralele)**

$$c = -1/f'(x_0)$$

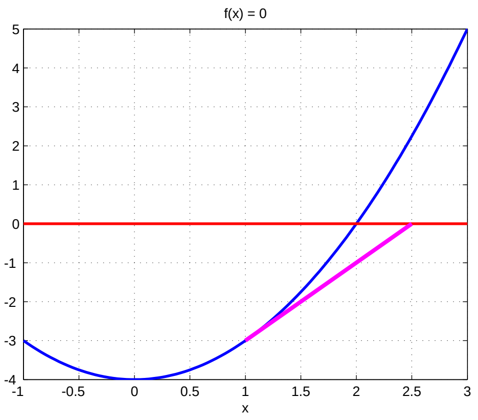
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \tag{15}$$

Semnificaţia geometrică?



Notes

# Metoda tangentelor paralele

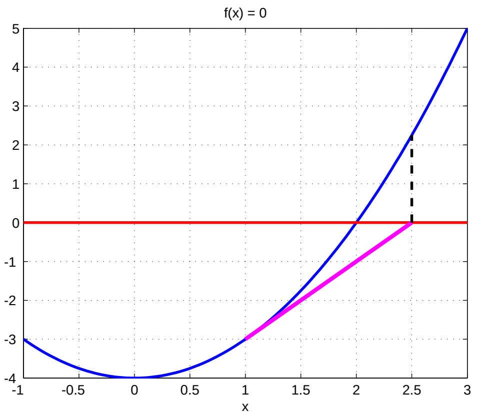





Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

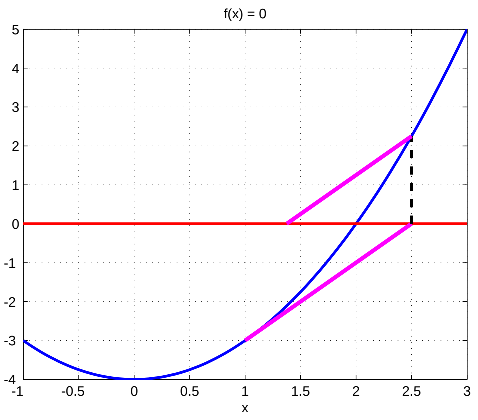
# Metoda tangentelor paralele






Notes

# Metoda tangentelor paralele

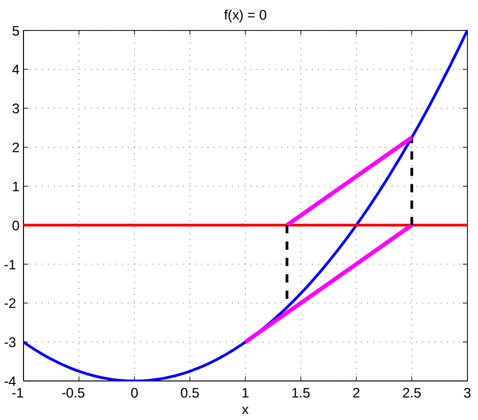





Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

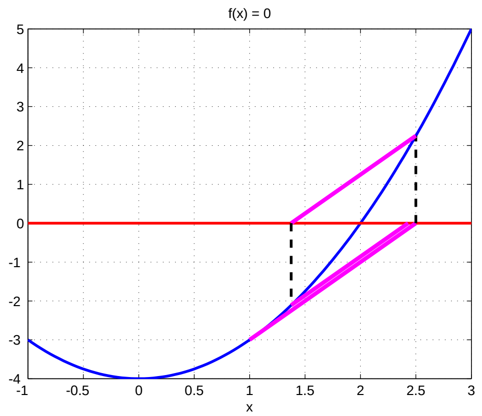
Metoda tangentelor paralele






Notes

# Metoda tangentelor paralele

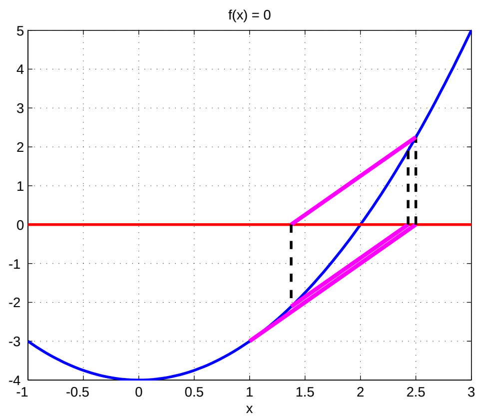





Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

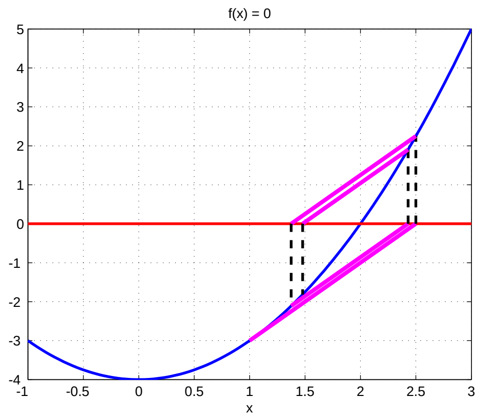
# Metoda tangentelor paralele






Notes

# Metoda tangentelor paralele

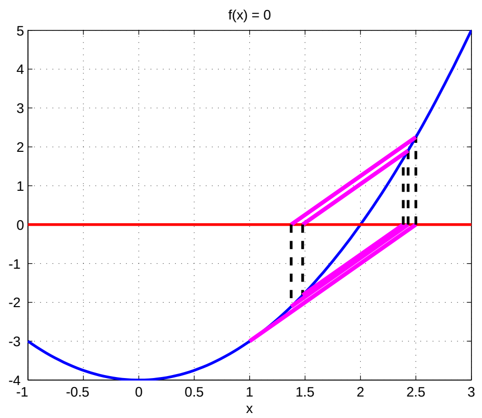





Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

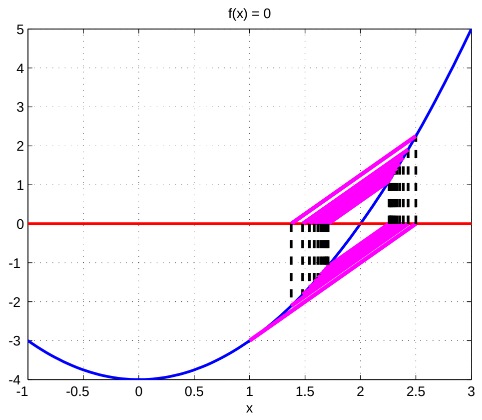
# Metoda tangentelor paralele






Notes

# Metoda tangentelor paralele

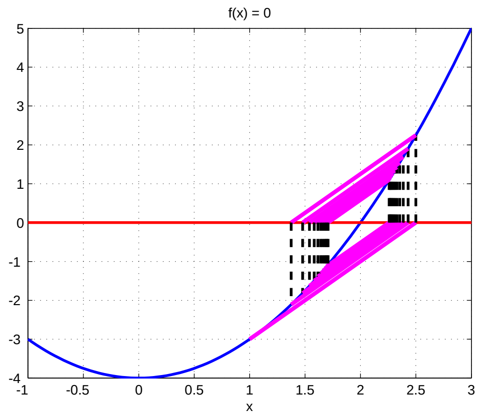





Notes



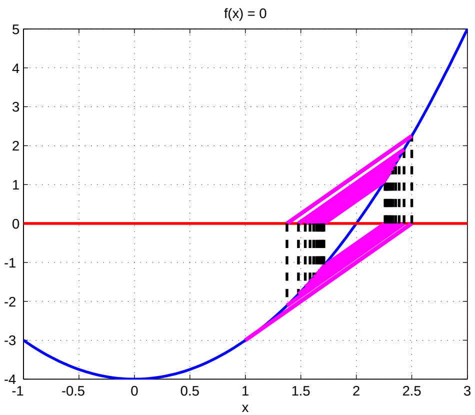
# Metoda tangentelor paralele






Notes

# Metoda tangentelor paralele



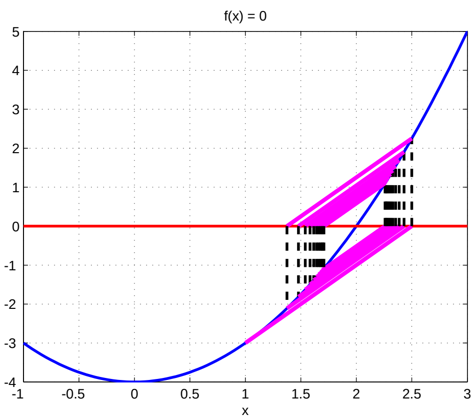

- S-a redus efortul de calcul, dar doar pentru o iteraţie



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

# Metoda tangentelor paralele

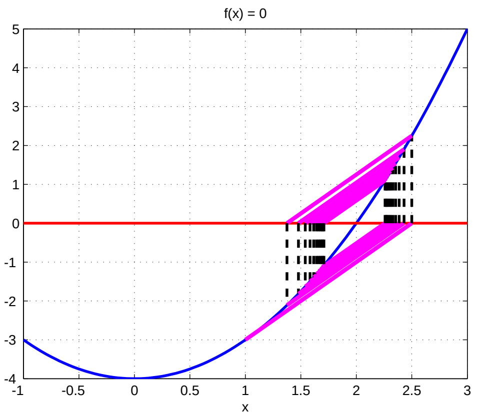



- S-a redus efortul de calcul, dar doar pentru o iteraţie
- Rămâne necesitatea de a avea o expresie analitică pentru derivată $f'(x)$.



Notes

# Metoda tangentelor paralele




- S-a redus efortul de calcul, dar doar pentru o iteraţie
- Rămâne necesitatea de a avea o expresie analitică pentru derivată $f'(x)$.
- Ce se poate face dacă nu există o astfel de expresie?



Notes



# Metoda secantelor

Foloseşte o aproximare numerică a derivatei

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \tag{16}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

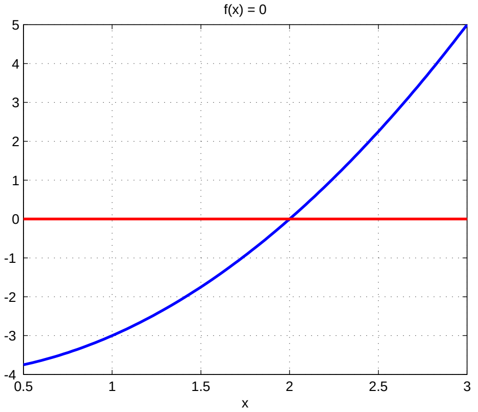
Semnificaţie geometrică: La fiecare iteraţie graficul funcţiei este aproximat cu secanta ce uneşte ultimele două puncte din şirul iterativ, având coordonatele $x_{k-1}, f(x_{k-1})$ şi respectiv $x_k, f(x_k)$.
OBS: Metoda eşuează dacă secanta are panta zero.



Notes

## Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă $x_0, x_1$ (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



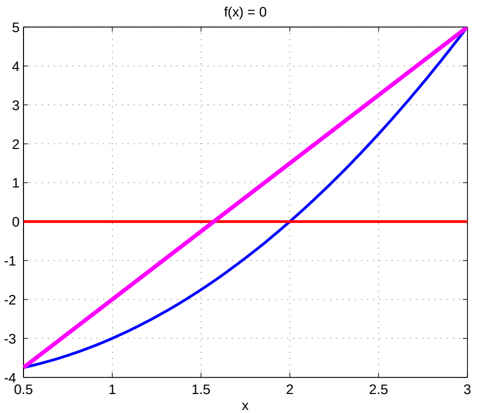



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

## Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă $x_0, x_1$ (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).

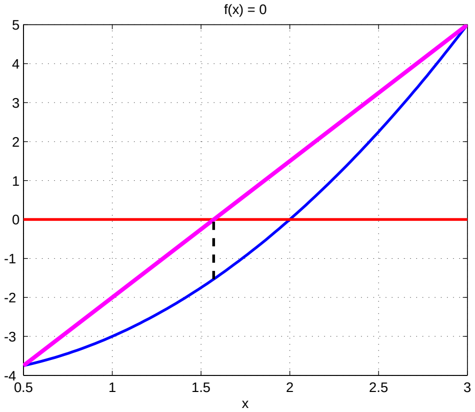





Notes

## Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă $x_0, x_1$ (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



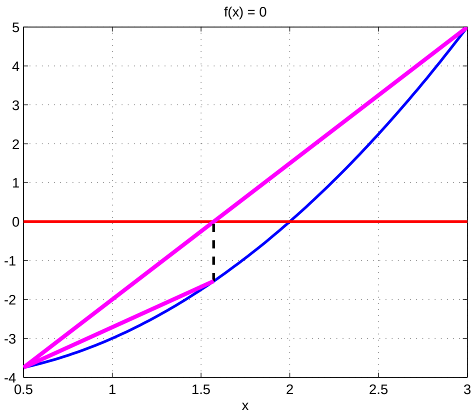



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

## Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă $x_0, x_1$ (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).

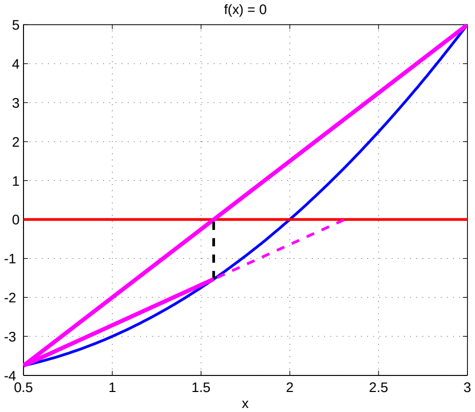



28/43
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

# Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă $x_0, x_1$ (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



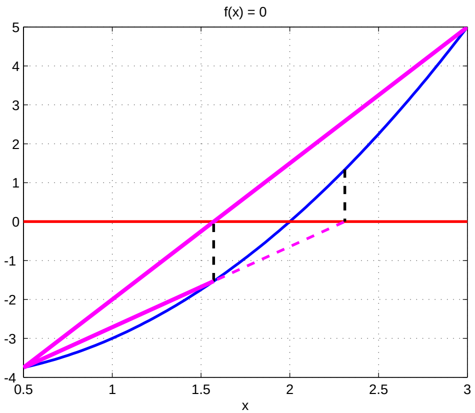



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă $x_0, x_1$ (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).

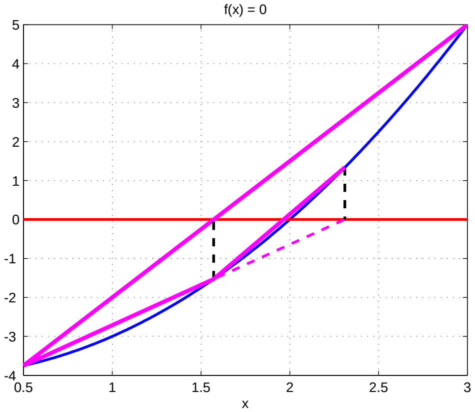





Notes

## Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă $x_0, x_1$ (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



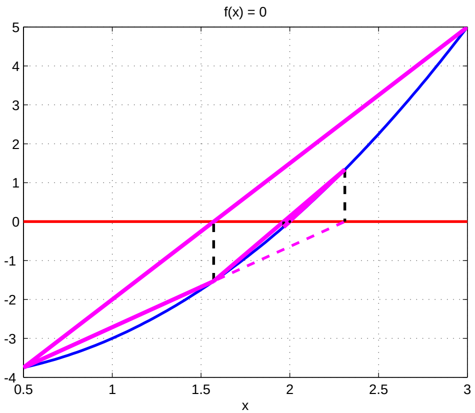



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

## Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă $x_0, x_1$ (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).

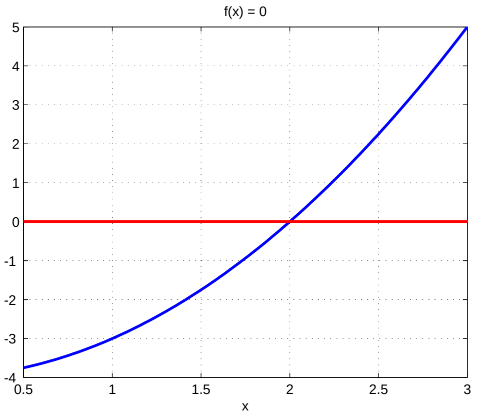


28/43
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

# Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



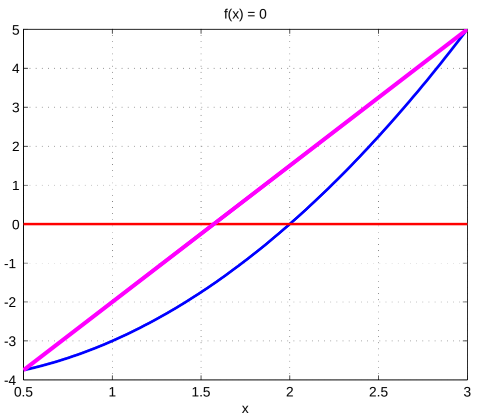



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

# Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.

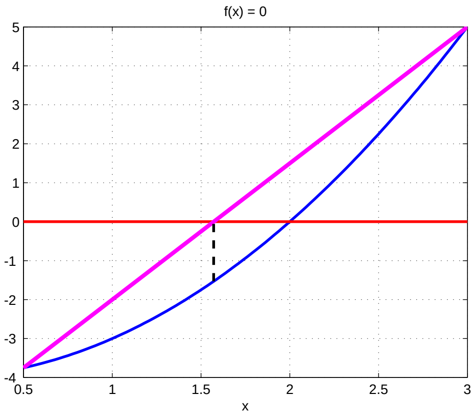





Notes

## Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



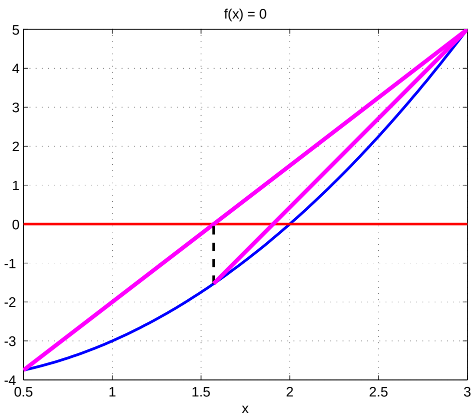



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.

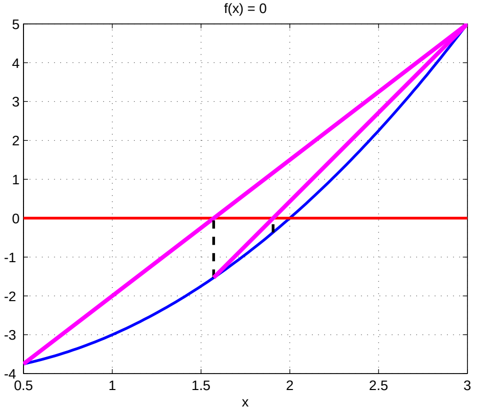





Notes

# Metoda secantelor

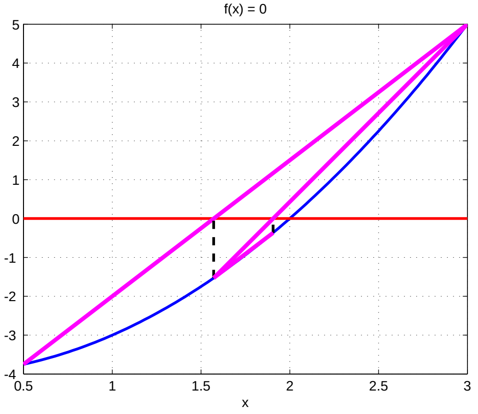
Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.






Notes

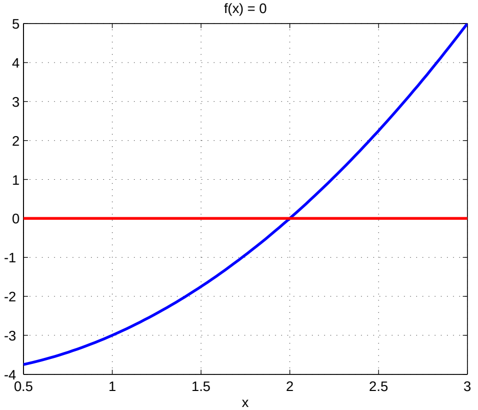
Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor
Metoda secantelor
Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



29/43
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare
Notes

## Metoda secantelor

Obs: variantă modificaţă, se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.



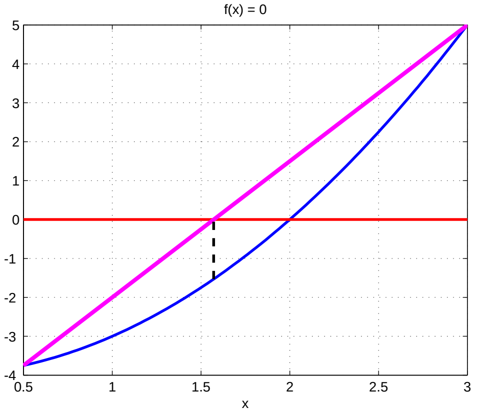



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

## Metoda secantelor

Obs: variantă modificaţă, se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.

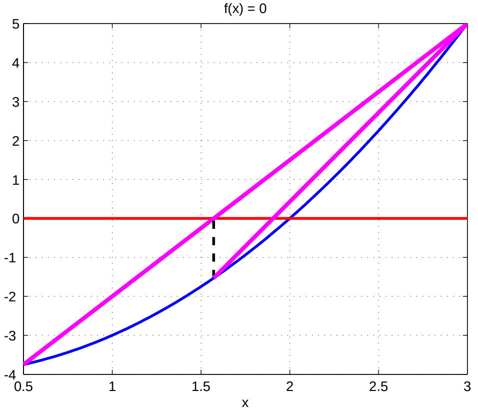





Notes

# Metoda secantelor

Obs: variantă modificaţă, se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.



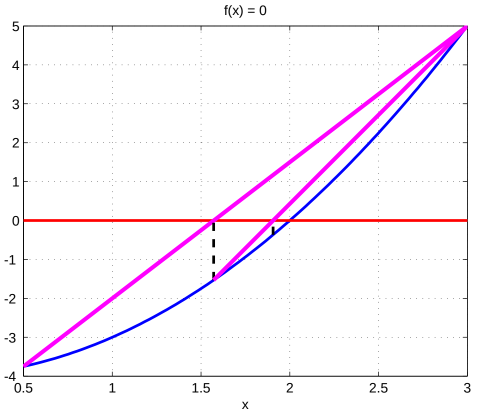



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

# Metoda secantelor

Obs: variantă modificaţă, se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.

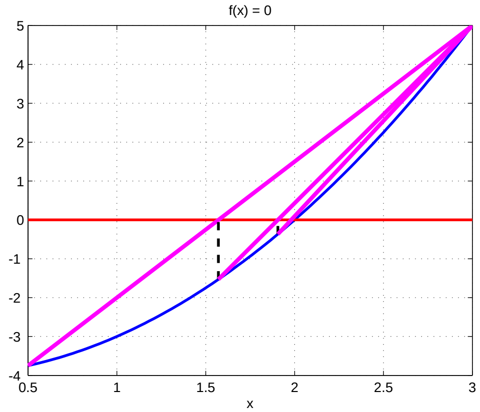





Notes

# Metoda secantelor

Obs: variantă modificată, se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.






Notes



# Algoritmi

**procedura** iteraţie simplă ($x_0$, *eps*, *nit*)
**real** $x_0$ ; iniţializare soluţie
**real** *eps* ; eroarea impusă
**întreg** *nit* ; număr maxim de iteraţii
**întreg** $k = 0$ ; contor iteraţii
**real** $xvechi = x_0$ ; iniţializarea soluţiei
**repetă**
    $k = k + 1$
    $xnou = g(xvechi)$ ; unde g(x)=x+cf(x)
    $d = |xnou - xvechi|$
    $xvechi = xnou$
**până când** $d < eps$ **sau** $k > nit$
**dacă** $k \leq nit$
    **scrie** *xnou*
**retur**



Notes

## Algoritmi

**procedura** Newton ($x_0, eps, nit$)
**real** $x_0$ ; iniţializare soluţie
**real** $eps$ ; eroarea impusă
**întreg** $nit$ ; număr maxim de iteraţii
**întreg** $k = 0$ ; contor iteraţii
**real** $xvechi = x_0$ ; iniţializarea soluţiei
**repetă**
  $k = k + 1$
  $xnou = xvechi - f(xvechi)/fder(xvechi)$
  $d = |xnou - xvechi|$
  $xvechi = xnou$
**până când** $d < eps$ **sau** $k > nit$
**dacă** $k \leq nit$
  **scrie** $xnou$
**retur**



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

## Algoritmi

**procedura** tangente paralele ($x_0, eps, nit$)
**real** $x_0$ ; iniţializare soluţie
**real** $eps$ ; eroarea impusă
**întreg** $nit$ ; număr maxim de iteraţii
**real** $xvechi = x_0$ ; iniţializarea soluţiei
**real** $fd = fder(x_0)$ ; valoarea derivatei în $x_0$
**repetă**
  $k = k + 1$
  $xnou = xvechi - f(xvechi)/fd$
  $d = |xnou - xvechi|$
  $xvechi = xnou$
**până când** $d < eps$ **sau** $k > nit$
**dacă** $k \leq nit$
  **scrie** $xnou$
**retur**

31/43
Gabriela Ciuprina Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

## Algoritmi

**procedura** secante $(a, b, eps, nit)$
**real** $a, b$ ; domeniul de definiţie al funcţiei
**real** $eps$ ; eroarea impusă
**întreg** $nit$ ; număr maxim de iteraţii
**întreg** $k = 0$ ; contor iteraţii
**real** $xv = a$ ; iniţializări ale soluţiei
**real** $xvv = b$
**repetă**
  $k = k + 1$
  $xnou = xv - (xv - xvv)f(xv)/(f(xv) - f(xvv))$
  $d = |xnou - xv|$
  $xvv = xv$
  $xv = xnou$
**până când** $d < eps$ **sau** $k > nit$
**dacă** $k \leq nit$
  **scrie** $xnou$
**retur**



Notes



## Comparaţie - efortul de calcul

- Depinde de eroarea impusă soluţiei.
- Efortul pentru o iteraţie depinde de metodă.
- Operaţiile de referinţă: evaluarea funcţiei $f$ sau a derivatei acesteia.

| Metoda | Număr de evaluări pe iteraţie |
|---|---|
| Bisecţiei | 2 pentru $f$ (poate fi redusă la o evaluare) |
| Iteraţia simplă | 1 pentru $f$ |
| Tangente paralele | 1 pentru $f$ |
| Newton | 1 pentru $f$ şi 1 pentru $f'$ |
| Secante | 2 pentru $f$ (poate fi redusă la o evaluare) |



Notes

## Comparaţie - convergenţă

Bisecţia

- garantat convergentă în ipoteza schimbării semnului;
- deoarece $a_k = 1/2a_{k-1}$ se spune că are convergenţă liniară.

$a_k$ = marginea erorii absolute - revedeţi cursul despre erori.



Notes



## Comparaţie - convergenţă

Metodele bazate pe iteraţii

- nu sunt garantat convergente;
- viteza de convergenţă diferă de la o metodă la alta;
- metoda Newton e cea mai rapid convergentă, are convergenţă pătratică (demo pe slide-ul următor).
- metoda secantelor are o viteză de convergenţă între cea liniară şi cea pătratia ("superliniară"): $a_k \approx C a_{k-1}^{\alpha}$, $\alpha = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61$. [Cheney]

Metoda Newton ar putea avea o eficienţă globală superioară, chiar dacă la fiecare iteraţie timpul de calcul este mai mare.



Notes

## Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

## Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$



Notes

## Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

## Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$x_k = x^* + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

35/43
Gabriela Ciuprina
Ecuaţii şi sisteme algebrice neliniare

Notes

## Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$x_k = x^* + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$|x_k - x^*| \leq M|(x_{k-1} - x^*)|^2 \qquad (18)$$



Notes

Ecuaţii algebrice neliniare - formularea problemei
Metode de rezolvare numerică
Sisteme de ecuaţii algebrice neliniare
Metoda bisecţiei
Metoda iteraţiei simple
Metoda Newton (a tangentelor)
Metoda secantelor

## Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$x_k = x^* + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$|x_k - x^*| \leq M|(x_{k-1} - x^*)|^2 \qquad (18)$$

*q.e.d.*



Notes

## Enunţ

Se dau $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continue, $k = 1, \ldots, n$.
Se cer $x_k$ pentru care

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$



Notes



## Enunţ

Se dă $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$, continuă.
Se cere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pentru care

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad (19)$$

unde

$$\mathbf{F} = [f_1, f_2, \ldots, f_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

Exemplu: - circuite rezistive neliniare. Altele?



Notes

## Iteraţii simple

Bisecţia - nu se poate generaliza

Iteraţia simplă:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{20}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{21}$$

unde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Procedura este convergentă dacă

$$\|\mathbf{G}\| < 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\|\mathbf{I} + \mathbf{C}\mathbf{F}'(\mathbf{x})\|$$

unde $\mathbf{F}'$ este matricea Jacobian.



Notes



## Iteraţii simple

Matricea Jacobian

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Procedura e cu atât mai rapid convergentă cu cât $\|\mathbf{I} + \mathbf{C}\mathbf{F}'(\mathbf{x})\|$ este mai mică.

$$\Rightarrow$$

Viteza maximă de convergenţă corespunde alegerii

$$\|\mathbf{I} + \mathbf{C}\mathbf{F}'(\mathbf{x})\| = 0$$



Notes

## Newton

Newton:

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{F}'(\mathbf{x}))^{-1} \tag{23}$$

Iteraţii Newton:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{24}$$

Metoda eşuează dacă se întâlneşte o matrice Jacobian singulară.



Notes



## Newton - algoritm

Nu se implementează formula

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{25}$$

Dacă notăm **z** corecţia:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{z} \tag{26}$$

atunci

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

$$(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}))\mathbf{z} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{27}$$

La fiecare iteraţie neliniară

1. se calculează corecţia prin rezolvarea sist. algebric liniar (27);
2. se actualizează soluţia cu (26).



Notes

## Alte variante

- Newton-Kantorovich (tangente paralele)

$$(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(0)}))\mathbf{z} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{28}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{z} \tag{29}$$

  Sistemul de rezolvat are întotdeauna aceeaşi matrice a coeficienţilor $\Rightarrow$ este eficientă folosirea factorizării.
- Secante - derivatele parţiale din formula Jacobianului se calculează numeric, cu formule de derivare regresiva de ordinul 1.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{f_i(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_j^{(k)}, \ldots, x_n^{(k-1)}) - f_i(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_j^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})}{x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}}$$



Notes



## Referinţe

- Pseudocod şi complexitate - Cap.9 din

[1] Gabriela Ciuprina, Mihai Rebican, Daniel Ioan - Metode numerice in ingineria electrica - Indrumar de laborator pentru studentii facultatii de Inginerie electrica, Editura Printech, 2013, disponibil la

http://mn.lmn.pub.ro/indrumar/IndrumarMN_Printech2013.pdf



Notes