Rezolvarea ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii algebrice neliniare

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" Bucureşti, Facultatea de Inginerie Electrică

Suport didactic pentru disciplina *Metode numerice*, 2017-2018

Cuprins

Formularea problemei

Enunţ

Se dă $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$, continuă.

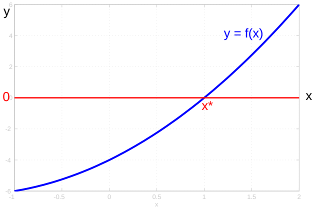
Se cere x pentru care

$$f(x) = 0$$

Buna formulare matematică

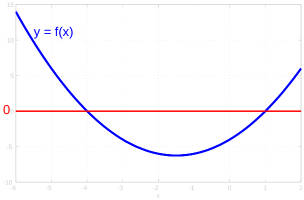
Există o soluţie $x^* \in [a, b]$ şi aceasta este unică.

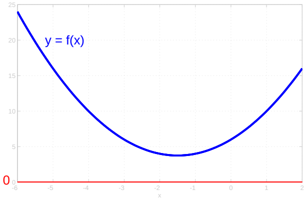
$$f(x^*) = 0$$



Formularea problemei

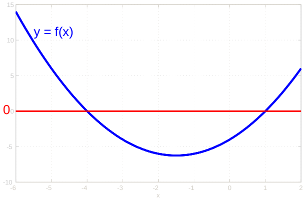
Exemple de probleme prost formulate:

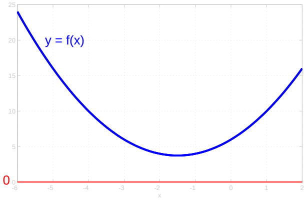




Formularea problemei

Exemple de probleme prost formulate:

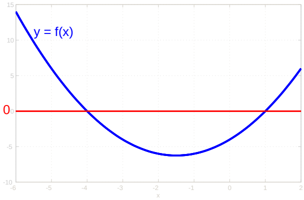


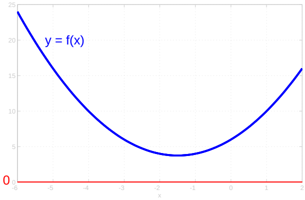


Soluţia nu este unică.

Formularea problemei

Exemple de probleme prost formulate:



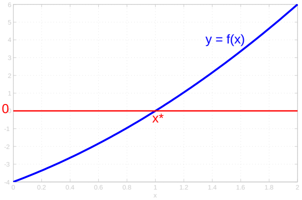


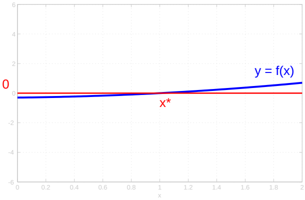
Soluţia nu este unică.

Nu există soluţie.

Condiţionarea problemei

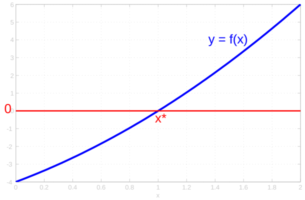
Condiţionarea depinde de panta lui f în apropierea soluţiei.

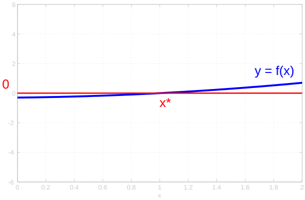




Condiţionarea problemei

Condiţionarea depinde de panta lui f în apropierea soluţiei.

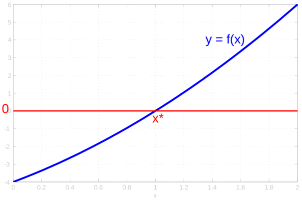


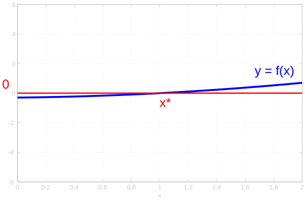


Bine condiţionată.

Condiţionarea problemei

Condiţionarea depinde de panta lui *f* în apropierea soluţiei.





Bine condiţionată. Prost condiţionată.

Condiţionarea problemei

Numărul de condiţionare (revedeţi cursul despre erori):

Formulare implicită

$$f(x) = y$$

(y - date, x - rezultat), aici $y = 0$

Formulare explicită

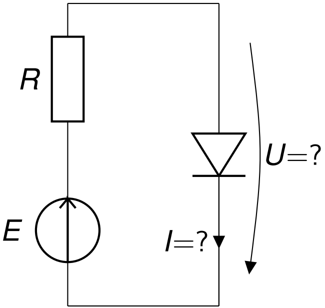
$$x = g(y)$$

($g = f^{-1}$)

$$\hat{k} = \|J(g(y))\| = |g'(y)| = \frac{1}{|f'(x)|}$$

Dacă $|f'(x^*)| \approx 0 \Rightarrow \hat{k}$ e mare $\Rightarrow$ prost condiţionată.

Exemplul 1



Se dau: E, R şi caracteristica diodei $i = g(u)$

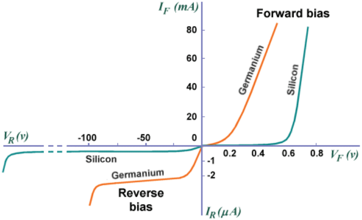
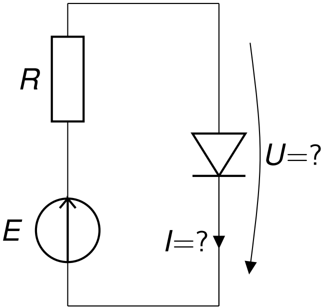


Figura este preluată de la

https://www.technologyuk.net/physics/

Se cere: punctul static de functionare al diodei (I, U)

Exemplul 1



$$\begin{aligned} u &= -Ri + E \\ i &= g(u) \end{aligned}$$

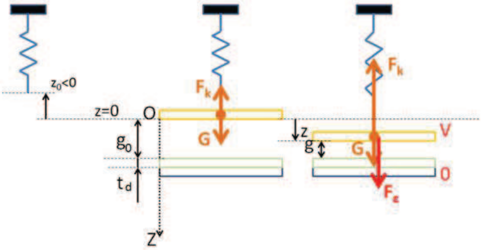
$$u + Rg(u) - E = 0$$

$$f(u) = 0$$

unde

$$f(u) = u + Rg(u) - E$$

Exemplul 2



Se dau:
g_0, A, t_d
k, ε_r
V
Se cere: g

$$k(g_0 - g) = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2\left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r}\right)^2}$$

$$f(g) = 0$$

unde

$$f(g) = (g - g_0)\left(g + \frac{t_d}{\varepsilon_r}\right)^2 + \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2k}$$

Metoda bisecţiei - ideea

Ipoteză suplimentară:

$$f(a)f(b) < 0$$

Ideea

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \rightarrow x^*$$

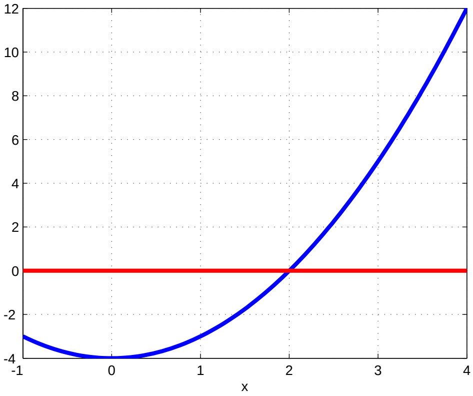
Prin înjumătăţirea intervalului:

1. $x_m = (a + b)/2$
2. se va selecta dintre intervalele $[a, x_m]$ şi $[x_m, b]$ pe acela care conţine soluţia
3. se renotează cu $[a, b]$ jumătatea aleasă şi se reia de la pasul 1.

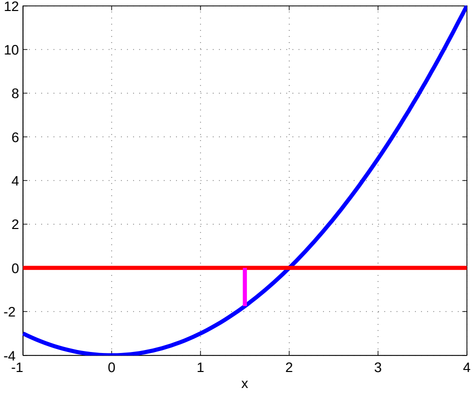
Algoritmul se opreşte atunci când $|b - a| < \varepsilon$

ε este o eroare absolută impusă de utilizator.

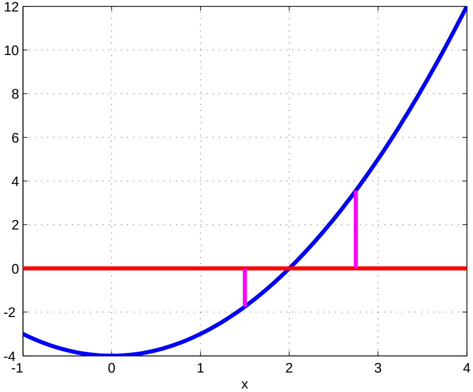
Metoda bisecţiei - ideea



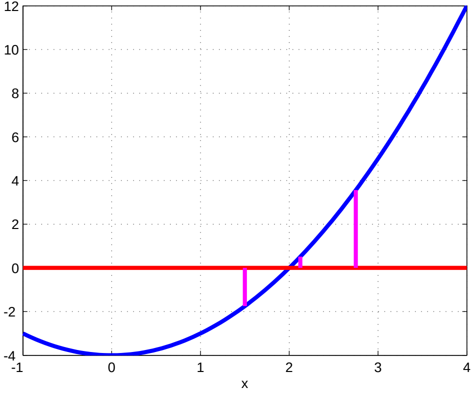
Metoda bisecţiei - ideea



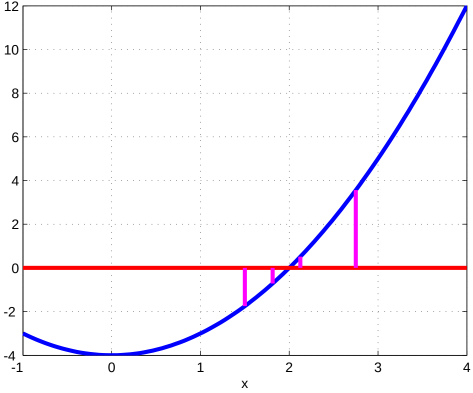
Metoda bisecţiei - ideea



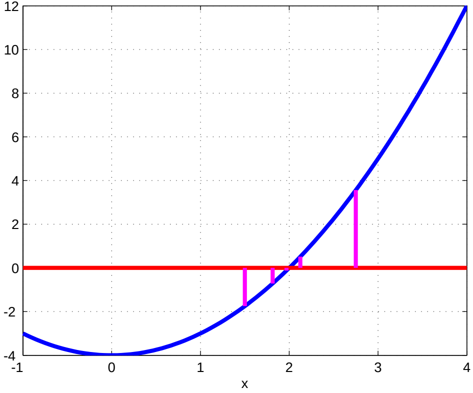
Metoda bisecţiei - ideea



Metoda bisecţiei - ideea



Metoda bisecţiei - ideea



Metodei bisecţiei - algoritm

```
funcţie bisecţie (a, b, eps, nit)
    real a, b                      ; domeniul de definiţie al funcţiei f
    real ε                         ; eroarea impusă
    întreg nit                     ; număr maxim de iteraţii
    real xm                        ; soluţia
    întreg k = 0                   ; contor iteraţii
    repetă
        k = k + 1
        xm = (a + b)/2
        dacă f(xm)f(a) > 0 atunci
                a = xm
        altfel
                b = xm
    până când (b − a) < eps sau k > nit
    dacă k > nit
        scrie Eroarea impusă nu a fost atinsă.
    întoarce xm          ; soluţie
retur
```

Metoda bisecţiei - erori

La fiecare iteraţie, eroarea absolută se înjumătăţeste:

$$\begin{aligned}
|x_0 - x^*| &< I \\
|x_1 - x^*| &< I/2 \\
|x_2 - x^*| &< I/2^2 \\
&\vdots \\
|x_k - x^*| &< I/2^k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$I = b - a$

În ipotezele făcute, procedura este garantat convergentă!

Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \tag{2}$$

g se numeşte *funcţie de iteraţie*

Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \rightarrow x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \tag{2}$$

g se numeşte *funcţie de iteraţie*

1. $g = ?$

Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \tag{2}$$

g se numeşte *funcţie de iteraţie*

1. $g = ?$
2. $x_0 = ?$

Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \tag{2}$$

g se numeşte *funcţie de iteraţie*

1. $g = ?$
2. $x_0 = ?$
3. Şirul este convergent?

Ideea metodei iteraţiei simple

Ecuaţia de rezolvat:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Ideea:

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots \to x^*$$

Calcul recursiv:

$$x_k = g(x_{k-1}), \tag{2}$$

g se numeşte *funcţie de iteraţie*

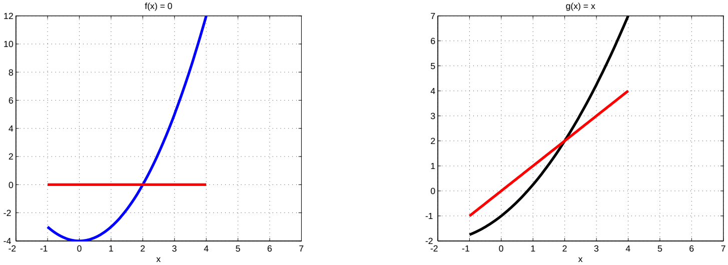
1. $g = ?$
2. $x_0 = ?$
3. Şirul este convergent?
4. Care este criteriul de oprire?

Metoda iteraţiei simple - construcţia lui g

$$x_k = g(x_{k-1}), \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x \tag{3}$$

$$x = g(x) \tag{4}$$

Soluţia ecuaţiei $f(x) = 0$ este punct fix al aplicaţiei g



Metoda iteraţiei simple - construcţia lui g

$$f(x) = 0$$

Metoda iteraţiei simple - construcţia lui *g*

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$

Metoda iteraţiei simple - construcţia lui g

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$

$$x + cf(x) = x$$

Metoda iteraţiei simple - construcţia lui g

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$

$$x + cf(x) = x$$

$$g(x) = x + cf(x) \tag{5}$$

Metoda iteraţiei simple - construcţia lui g

$$f(x) = 0$$

$$cf(x) = 0$$

$$x + cf(x) = x$$

$$g(x) = x + cf(x) \tag{5}$$

$$x_k = x_{k-1} + cf(x_{k-1}) \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

$$g(x) = x + cf(x) \tag{7}$$

$$x_k = x_{k-1} + cf(x_{k-1}) \qquad k = 1, 2, \dots, n. \tag{8}$$

Iniţializare arbitrară $x_0 \in [a, b]$.
Obs: Constanta c influenţază puternic convergenţa.

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă g este o contratie, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

g este contracţie, dacă:

$$|g(x_1) - g(x_2)| < |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in [a, b] \tag{9}$$

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

$$g(x) = x + cf(x) \tag{7}$$

$$x_k = x_{k-1} + cf(x_{k-1}) \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Iniţializare arbitrară $x_0 \in [a, b]$.
Obs: Constanta c influenţază puternic convergenţa.

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă g este o contratie, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

g este contracţie, dacă:

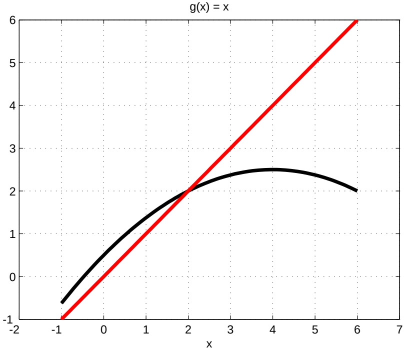
$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in [a, b] \tag{9}$$

$L < 1$ (strict!)

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

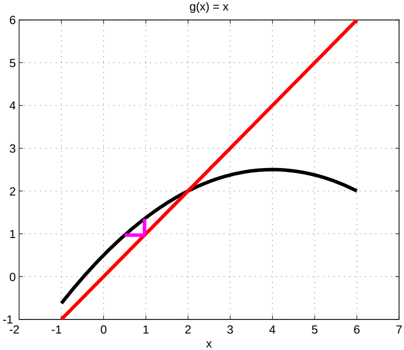


Convergent

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

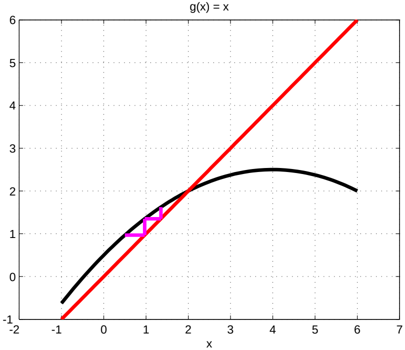


Convergent

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

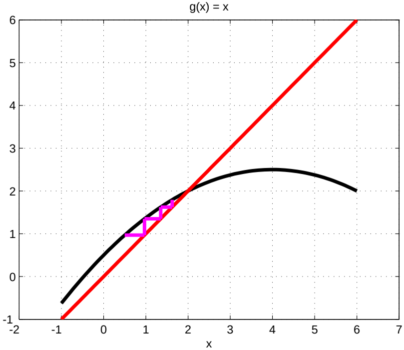


Convergent

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

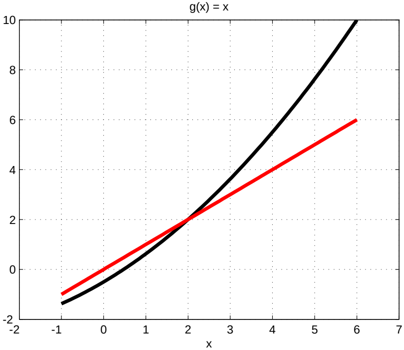


Convergent

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

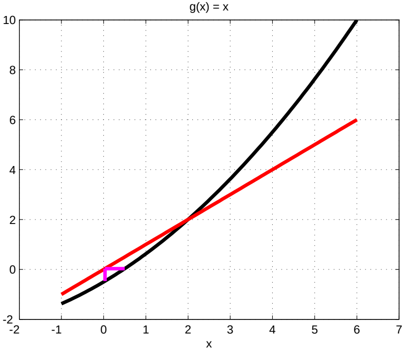


Divergent

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

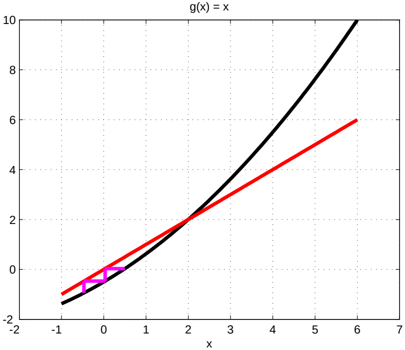


Divergent

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.

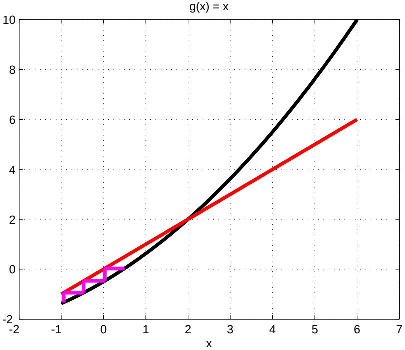


Divergent

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Teoremă - condiţie suficientă de convergenţă

Dacă f este derivabilă şi $|g'| < 1$, atunci şirul iteraţiilor este convergent.



Divergent

Metoda iteraţiei simple - convergenţa

Condiţia $|g'| < 1$ este echivalentă cu:

$$|1 + cf'(x)| < 1, \quad x \in [a, b]. \tag{10}$$

$\Rightarrow$ importanţa constantei c

Cu cât $|g'| = |1 + cf'(x)|$ este mai mic, cu atât şirul iterativ este mai rapid convergent.

Notăm L o margine a derivatei $|g'|(x) \leq L$.

$$|x_1 - x^*| = |g(x_0) - g(x^*)| = |g'(\zeta)(x_0 - x^*)| \leq L|x_0 - x^*|$$

$$|x_2 - x^*| \leq L|x_1 - x^*| \leq L^2|x_0 - x^*|$$

$$|x_3 - x^*| \leq L|x_2 - x^*| \leq L^3|x_0 - x^*|$$

$$\vdots$$

$$|x_k - x^*| \leq L^k|x_0 - x^*| \tag{11}$$

Metoda iteraţiei simple - condiţia de oprire

Eroarea $|x_n - x^*|$ - nu se poate calcula
Reziduul $|f(x_n)|$ - se poate calcula, dar trebuie corelat cu numărul de condiţionare

$$f(x_n) - f(x^*) = f'(\zeta)(x_n - x^*)$$

$$|x_n - x^*| = \frac{1}{f'(\zeta)}|f(x_n)|$$

$$|x_n - x^*| \leq \hat{k}|f(x_n)|$$

Metoda iteraţiei simple - condiţia de oprire

Dar

$$|x_n - x_{n-1}| = |g(x_{n-1}) - x_{n-1}| = |x_{n-1} + cf(x_{n-1}) - x_{n-1}| = |cf(x_{n-1})|$$

Dacă c e corelat cu inversa derivatei, atunci cel mai natural criteriu de oprire este

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

unde ε este parametru de intrare (impus de utilizator).

Metoda Newton

c se alege a.î. viteza de convergenţă să fie maximă:

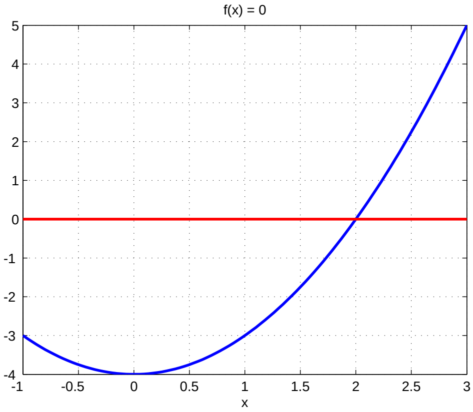
$$1 + c_k f'(x_k) = 0$$

$$c_k = -\frac{1}{f'(x_k)}. \tag{12}$$

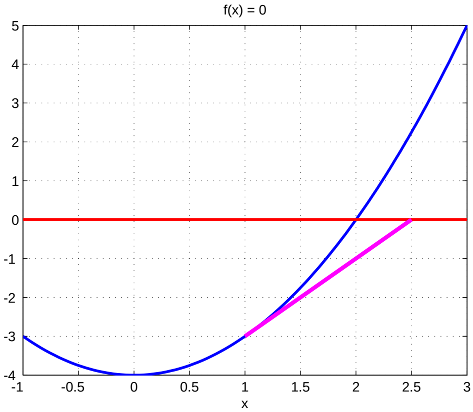
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Semnificaţie geometrică: La fiecare iteraţie graficul funcţiei este aproximat cu tangenta dusă în punctul de coordonate $x_k, f(x_k)$.
OBS: Metoda eşuează dacă tangenta are panta zero.

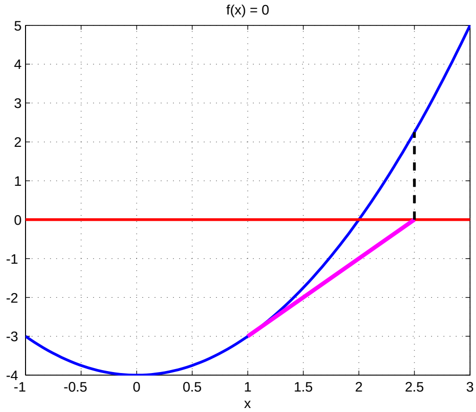
Metoda Newton



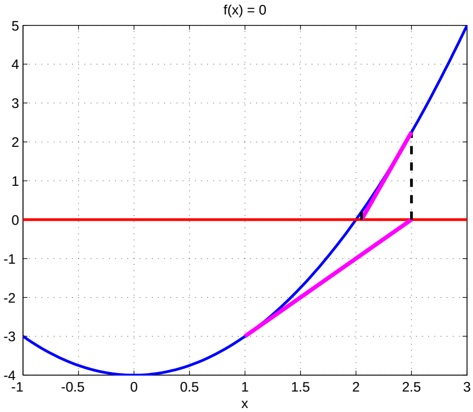
Metoda Newton



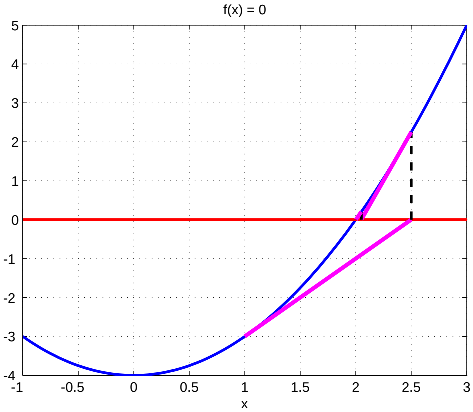
Metoda Newton



Metoda Newton



Metoda Newton



Metoda Newton

Justificare: Ecuaţia dreptei tangente:

$$y = f'(x)(x - x_k) + f(x_k), \tag{14}$$

Intersecţia tangentei cu axa orizontală:

$$y = 0 \Rightarrow x = x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Obs: la fiecare iteraţie trebuie evaluată derivata $f'(x_k)$, ceea ce poate necesita un efort mare de calcul.

:(

Ce se poate face pentru diminuarea efortului de calcul?

Metoda tangentelor paralele

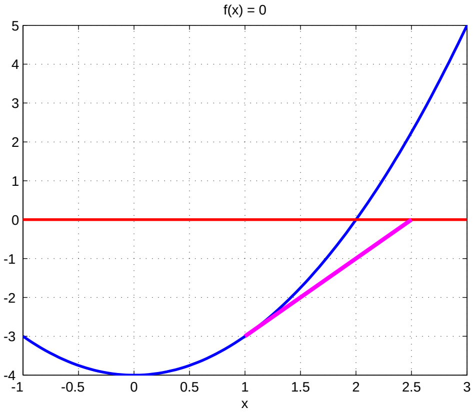
Variantă simplificată metoda **Newton-Kantorovici (a tangentelor paralele)**

$$c = -1/f'(x_0)$$

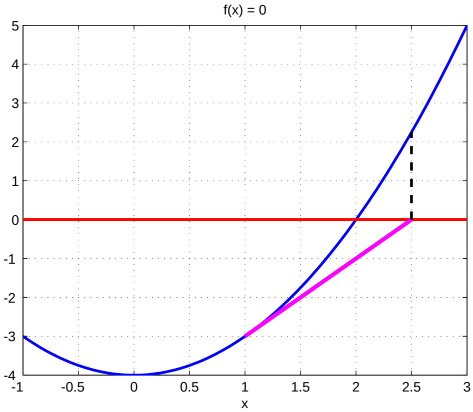
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \tag{15}$$

Semnificaţia geometrică?

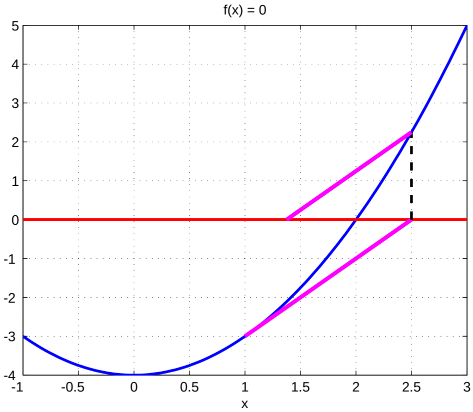
Metoda tangentelor paralele



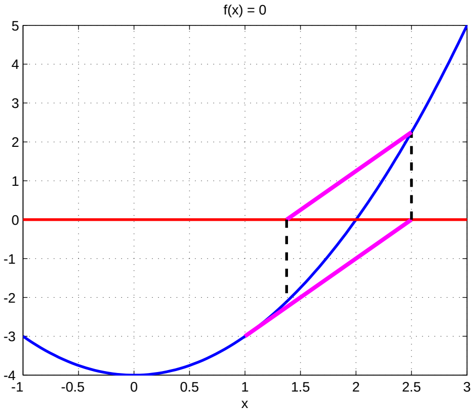
Metoda tangentelor paralele



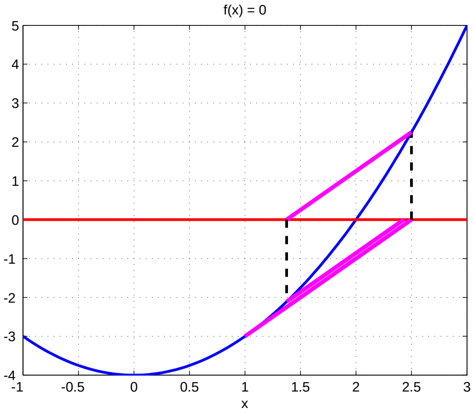
Metoda tangentelor paralele



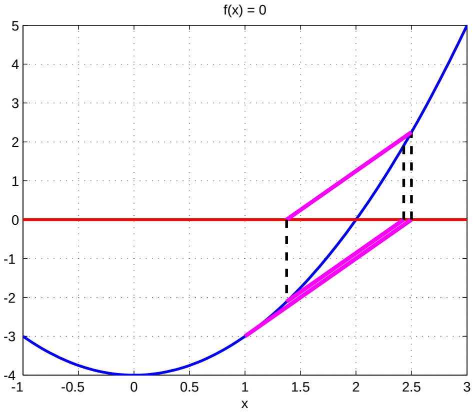
Metoda tangentelor paralele



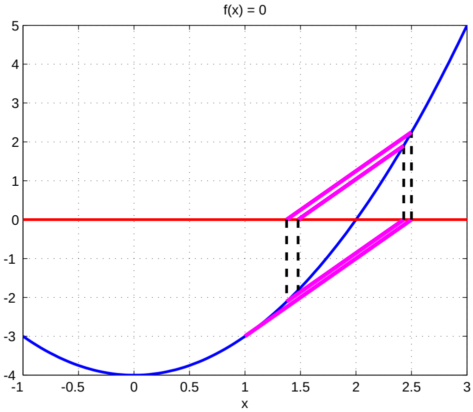
Metoda tangentelor paralele



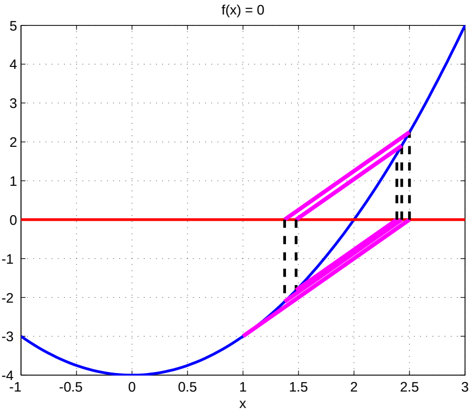
Metoda tangentelor paralele



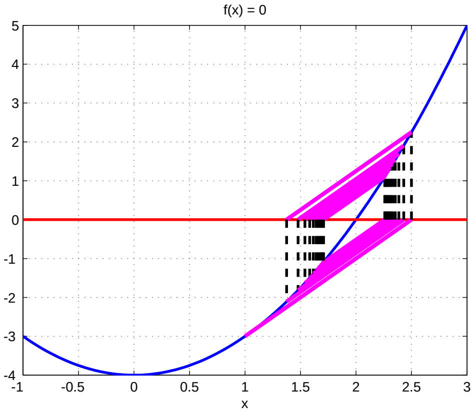
Metoda tangentelor paralele



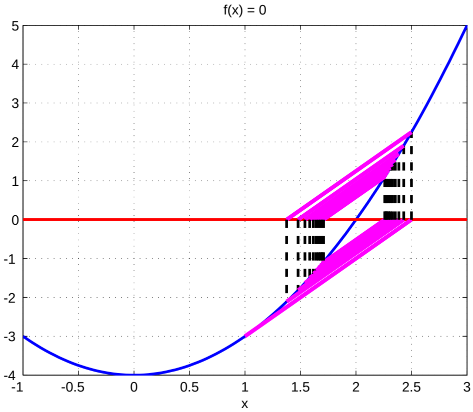
Metoda tangentelor paralele



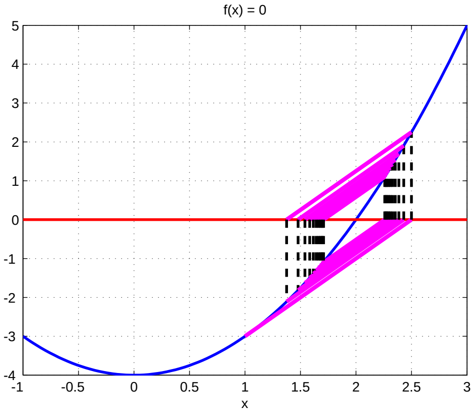
Metoda tangentelor paralele



Metoda tangentelor paralele

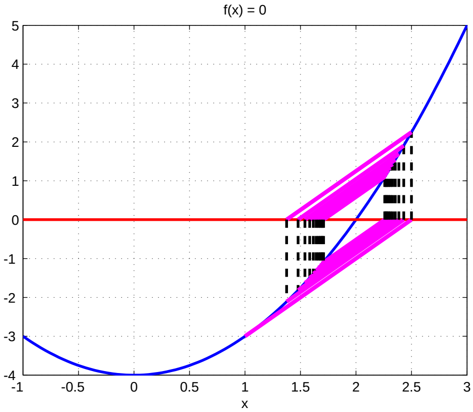


Metoda tangentelor paralele



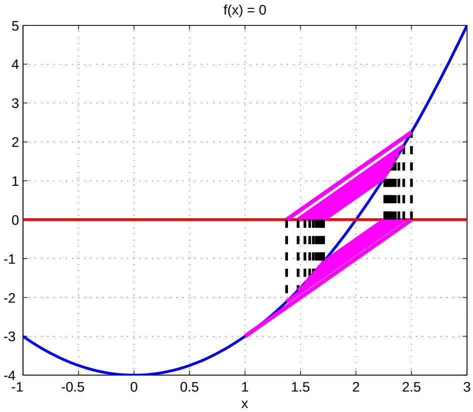
- S-a redus efortul de calcul, dar doar pentru o iteraţie

Metoda tangentelor paralele



- S-a redus efortul de calcul, dar doar pentru o iteraţie
- Rămâne necesitatea de a avea o expresie analitică pentru derivată $f'(x)$.

Metoda tangentelor paralele



- S-a redus efortul de calcul, dar doar pentru o iteraţie
- Rămâne necesitatea de a avea o expresie analitică pentru derivată $f'(x)$.
- Ce se poate face dacă nu există o astfel de expresie?

Metoda secantelor

Foloseşte o aproximare numerică a derivatei

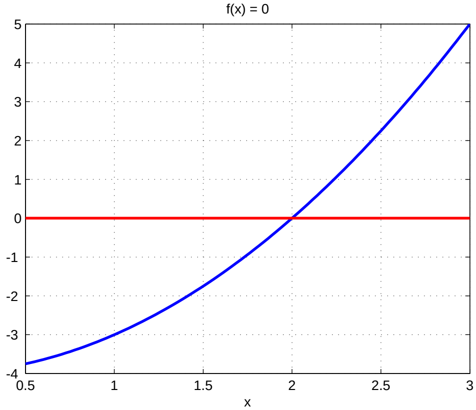
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \qquad (16)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (17)$$

Semnificaţie geometrică: La fiecare iteraţie graficul funcţiei este aproximat cu secanta ce uneşte ultimele două puncte din şirul iterativ, având coordonatele $x_{k-1}, f(x_{k-1})$ şi respectiv $x_k, f(x_k)$.
OBS: Metoda eşuează dacă secanta are panta zero.

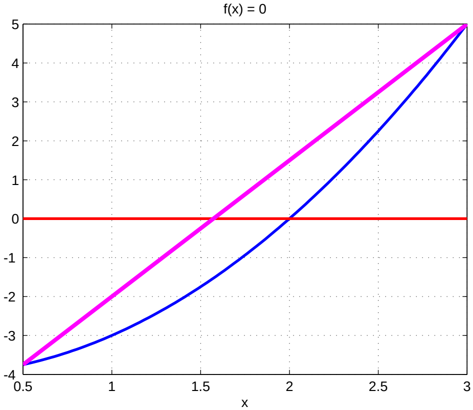
Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



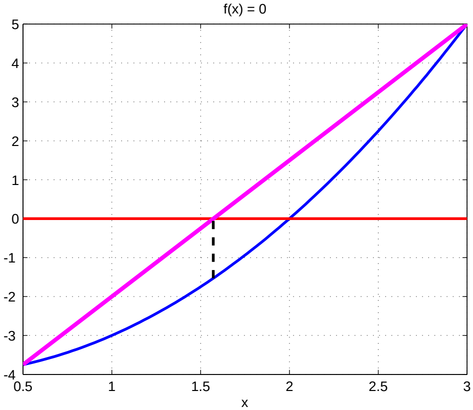
Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



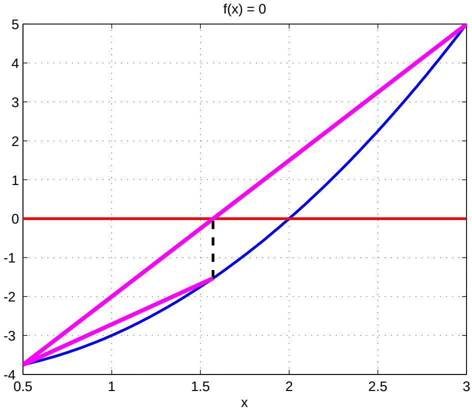
Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



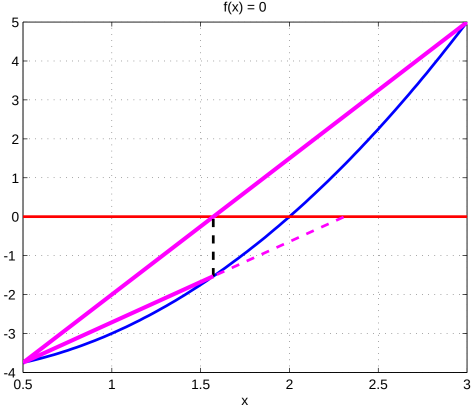
Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



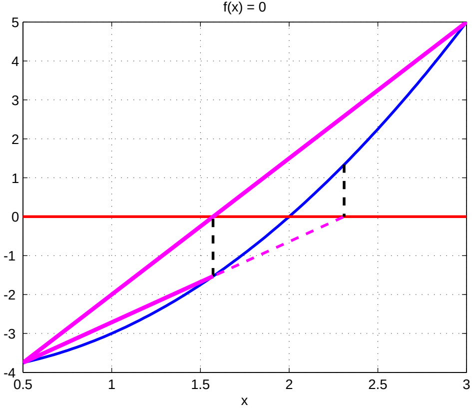
Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



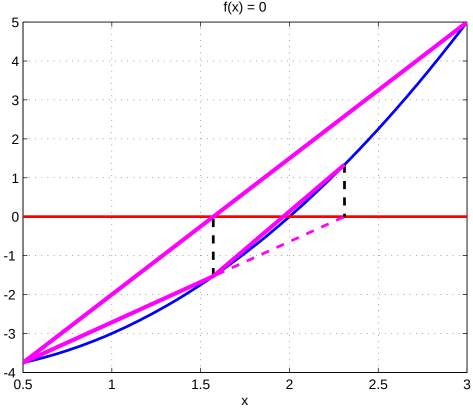
Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



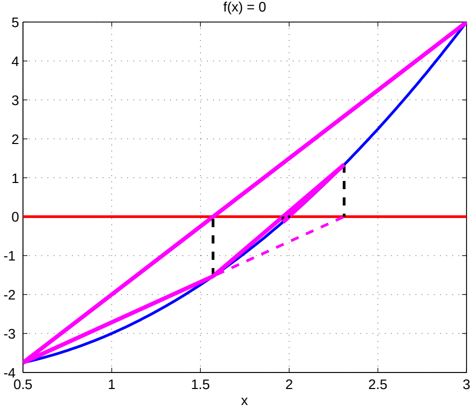
Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



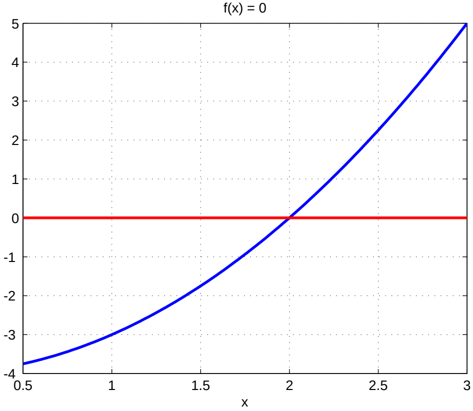
Metoda secantelor

Obs: funcţia de iteraţie are două variabile $x_{k+1} = g(x_k, x_{k-1})$, deci necesită o iniţializare dublă x_0, x_1 (ex: $x_0 = b, x_1 = a$).



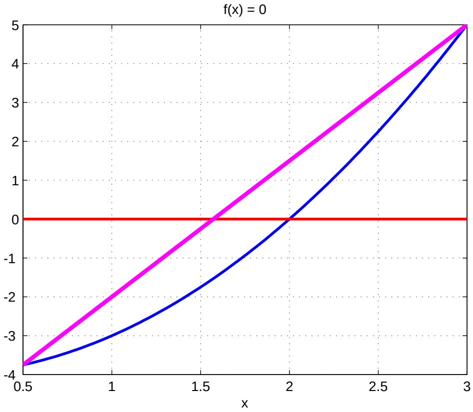
Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



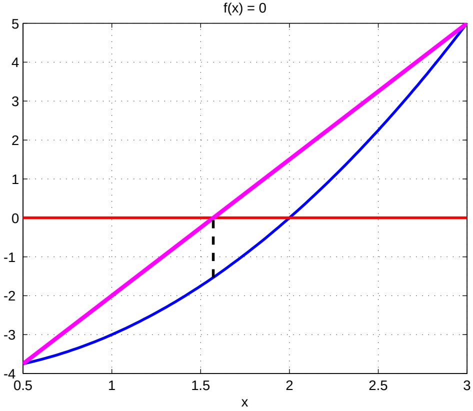
Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



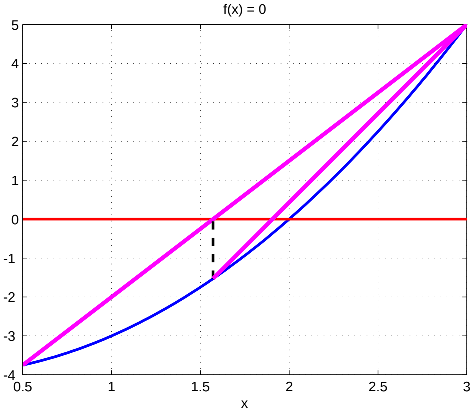
Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



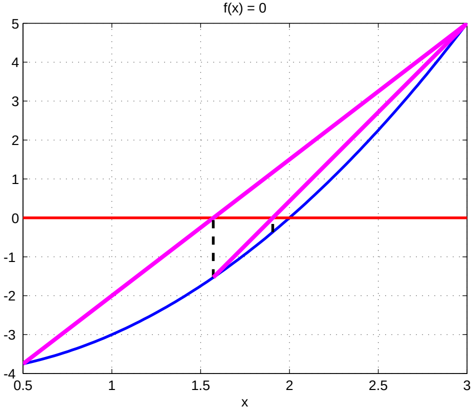
Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



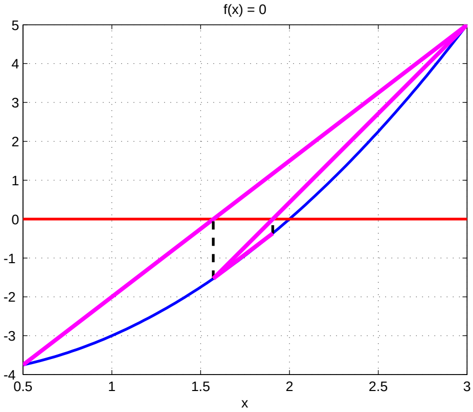
Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



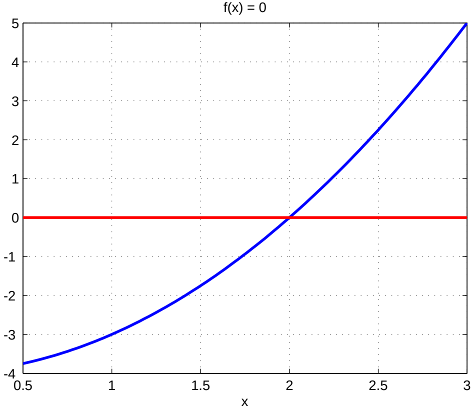
Metoda secantelor

Obs: dacă: $x_0 = a, x_1 = b$.



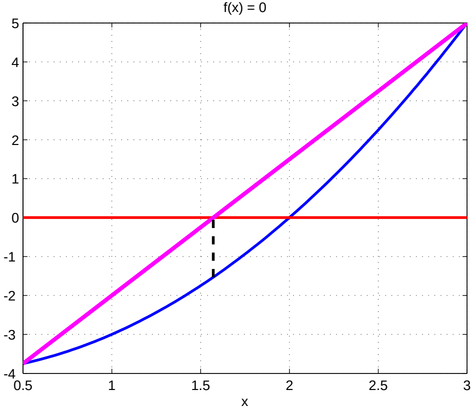
Metoda secantelor

Obs: variantă modificață, se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.



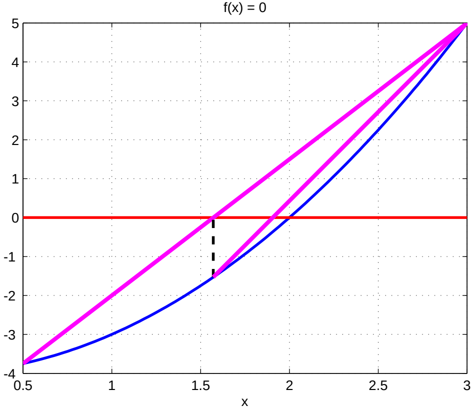
Metoda secantelor

Obs: variantă modificaţă, se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.



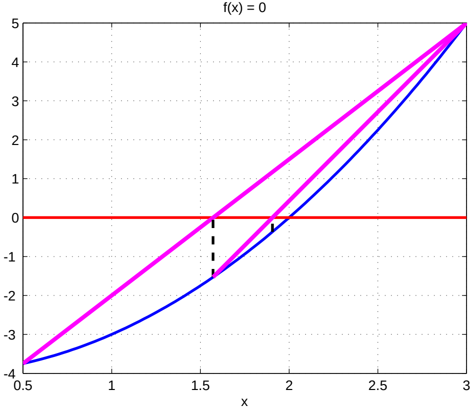
Metoda secantelor

Obs: variantă modificaţă, se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.



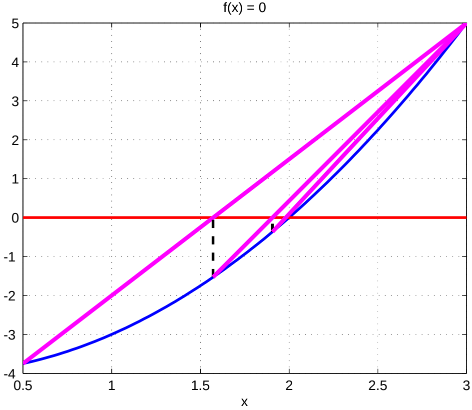
Metoda secantelor

Obs: variantă modificaţă, se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.



Metoda secantelor

Obs: variantă modificată, se alege secanta corespunzătoare unei schimbări a semnului.



Algoritmi

procedura iteraţie simplă (x_0, eps, nit)
real x_0 ; iniţializare soluţie
real eps ; eroarea impusă
întreg nit ; număr maxim de iteraţii
întreg $k = 0$; contor iteraţii
real $xvechi = x_0$; iniţializarea soluţiei
repetă
    $k = k + 1$
    $xnou = g(xvechi)$; unde g(x)=x+cf(x)
    $d = |xnou - xvechi|$
    $xvechi = xnou$
până când $d < eps$ **sau** $k > nit$
dacă $k \leq nit$
    scrie $xnou$
retur

Algoritmi

procedura Newton (x_0, *eps*, *nit*)
real x_0 ; iniţializare soluţie
real *eps* ; eroarea impusă
întreg *nit* ; număr maxim de iteraţii
întreg $k = 0$; contor iteraţii
real $xvechi = x_0$; iniţializarea soluţiei
repetă
    $k = k + 1$
    $xnou = xvechi - f(xvechi)/fder(xvechi)$
    $d = |xnou - xvechi|$
    $xvechi = xnou$
până când $d < eps$ **sau** $k > nit$
dacă $k \leq nit$
    scrie *xnou*
retur

Algoritmi

procedura tangente paralele (x_0, eps, nit)
real x_0 ; iniţializare soluţie
real eps ; eroarea impusă
întreg nit ; număr maxim de iteraţii
real $xvechi = x_0$; iniţializarea soluţiei
real $fd = fder(x_0)$; valoarea derivatei în x_0
repetă
  $k = k + 1$
  $xnou = xvechi - f(xvechi)/fd$
  $d = |xnou - xvechi|$
  $xvechi = xnou$
până când $d < eps$ **sau** $k > nit$
dacă $k \leq nit$
  scrie $xnou$
retur

Algoritmi

procedura secante (a, b, eps, nit)
real a, b ; domeniul de definiţie al funcţiei
real eps ; eroarea impusă
întreg nit ; număr maxim de iteraţii
întreg $k = 0$; contor iteraţii
real $xv = a$; iniţializări ale soluţiei
real $xvv = b$
repetă
  $k = k + 1$
  $xnou = xv - (xv - xvv)f(xv)/(f(xv) - f(xvv))$
  $d = |xnou - xv|$
  $xvv = xv$
  $xv = xnou$
până când $d < eps$ **sau** $k > nit$
dacă $k \leq nit$
  scrie $xnou$
retur

Comparaţie - efortul de calcul

- Depinde de eroarea impusă soluţiei.
- Efortul pentru o iteraţie depinde de metodă.
- Operaţiile de referinţă: evaluarea funcţiei f sau a derivatei acesteia.

Metoda	Număr de evaluări pe iteraţie
Bisecţiei	2 pentru f (poate fi redusă la o evaluare)
Iteraţia simplă	1 pentru f
Tangente paralele	1 pentru f
Newton	1 pentru f şi 1 pentru f'
Secante	2 pentru f (poate fi redusă la o evaluare)

Comparaţie - convergenţă

Bisecţia

- garantat convergentă în ipoteza schimbării semnului;
- deoarece $a_k = 1/2a_{k-1}$ se spune că are convergenţă liniară.

a_k = marginea erorii absolute - revedeţi cursul despre erori.

Comparaţie - convergenţă

Metodele bazate pe iteraţii

- nu sunt garantat convergente;
- viteza de convergenţă diferă de la o metodă la alta;
- metoda Newton e cea mai rapid convergentă, are convergenţă pătratică (demo pe slide-ul următor).
- metoda secantelor are o viteză de convergenţă între cea liniară şi cea pătratia ("superliniară"): $a_k \approx C a_{k-1}^{\alpha}$, $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.61$. [Cheney]

Metoda Newton ar putea avea o eficienţă globală superioară, chiar dacă la fiecare iteraţie timpul de calcul este mai mare.

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$x_k = x^* + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$x_k = x^* + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$|x_k - x^*| \leq M|(x_{k-1} - x^*)|^2 \tag{18}$$

Convergenţa metodei Newton - demonstraţie

Funcţia de iteraţie $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Se verifică uşor că $g'(x^*) = 0$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x) = g(x^*) + (x - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$g(x_{k-1}) = g(x^*) + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$x_k = x^* + (x_{k-1} - x^*)^2 g''(\zeta)/2$$

$$|x_k - x^*| \leq M|(x_{k-1} - x^*)|^2 \tag{18}$$

q.e.d.

Enunţ

Se dau $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continue, $k = 1, \ldots, n$.
Se cer x_k pentru care

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Enunţ

Se dă $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$, continuă.
Se cere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pentru care

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{19}$$

unde

$$\mathbf{F} = [f_1, f_2, \ldots, f_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

Exemplu: - circuite rezistive neliniare. Altele?

Iteraţii simple

Bisecţia - nu se poate generaliza

Iteraţia simplă:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{20}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{21}$$

unde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Procedura este convergentă dacă

$$\|\mathbf{G}\| < 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\|\mathbf{I} + \mathbf{C}\mathbf{F}'(\mathbf{x})\|$$

unde $\mathbf{F}'$ este matricea Jacobian.

Iteraţii simple

Matricea Jacobian

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Procedura e cu atât mai rapid convergentă cu cât $\|\mathbf{I} + \mathbf{CF}'(\mathbf{x})\|$ este mai mică.

$$\Rightarrow$$

Viteza maximă de convergentă corespunde alegerii

$$\|\mathbf{I} + \mathbf{CF}'(\mathbf{x})\| = 0$$

Newton

Newton:

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{F}'(\mathbf{x}))^{-1} \tag{23}$$

Iteraţii Newton:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{24}$$

Metoda eşuează dacă se întâlneşte o matrice Jacobian singulară.

Newton - algoritm

Nu se implementează formula

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{25}$$

Dacă notăm **z** corecţia:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{z} \tag{26}$$

atunci

$$\mathbf{z} = -(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

$$(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}))\mathbf{z} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{27}$$

La fiecare iteraţie neliniară

1. se calculează corecţia prin rezolvarea sist. algebric liniar (27);
2. se actualizează soluţia cu (26).

Alte variante

- Newton-Kantorovich (tangente paralele)

$$(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(0)}))\mathbf{z} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{28}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{z} \tag{29}$$

  Sistemul de rezolvat are întotdeauna aceeaşi matrice a coeficienţilor $\Rightarrow$ este eficientă folosirea factorizării.
- Secante - derivatele parţiale din formula Jacobianului se calculează numeric, cu formule de derivare regresiva de ordinul 1.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{f_i(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_j^{(k)}, \ldots, x_n^{(k-1)}) - f_i(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_j^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})}{x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}}$$

Referinţe

- Pseudocod şi complexitate - Cap.9 din

[1] Gabriela Ciuprina, Mihai Rebican, Daniel Ioan - Metode numerice in ingineria electrica - Indrumar de laborator pentru studentii facultatii de Inginerie electrica, Editura Printech, 2013, disponibil la http://mn.lmn.pub.ro/indrumar/IndrumarMN_Printech2013.pdf