Integrarea numerică

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" Bucureşti, Facultatea de Inginerie Electrică

Suport didactic pentru disciplina *Metode numerice*, 2017-2018

Notes

Cuprins

Notes

Importanţa evaluării integralelor

- Relaţii utile pentru evaluarea unor mărimi:

$$u = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \qquad \varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dA} \qquad q = \int_D \rho \, \mathrm{d}v$$

- Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), f) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t') \, \mathrm{d}t'$$

"rezolvare" = "integrare" (în acest context)

Notes

Formularea problemei - cazul cel mai simplu

Se dă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (cunoscută prin date sau prin cod)
Se cere evaluarea numerică a integralei definite

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

unde f este presupusă continuă şi mărginită.

Numeric: idei inspirate din matematică.

Notes

Idei de calcul numeric (I)

T. fundamentală a analizei

Dacă f e continuă şi F este o primitivă a ei ($F' = f$) atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

În problemele reale F nu este cunoscută $\Rightarrow$ aplicarea acestei metode este foarte grea / imposibilă.

Notes

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Importanţa evaluării integralelor
Formularea problemei integrării numerice
Idei de calcul numeric

Idei de calcul numeric (I)

T. fundamentală a analizei

Dacă f e continuă şi F este o primitivă a ei ($F' = f$) atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

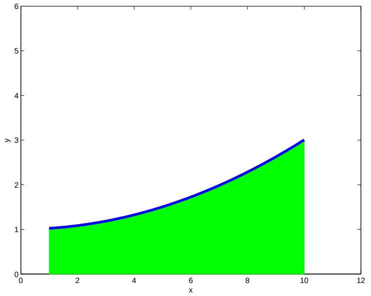
În problemele reale F nu este cunoscută $\Rightarrow$ aplicarea acestei metode este foarte grea / imposibilă.

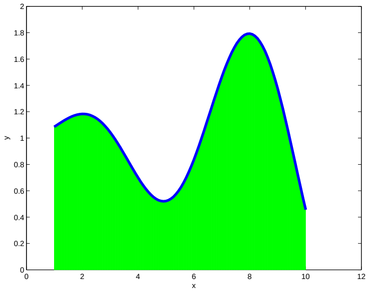
:(

Notes

Idei de calcul numeric (II)

Semnificaţia geometrică a integralei



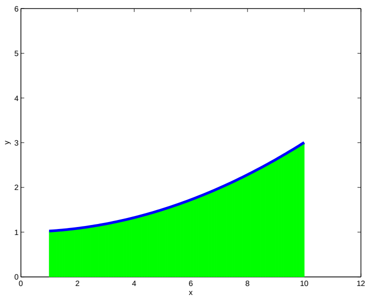


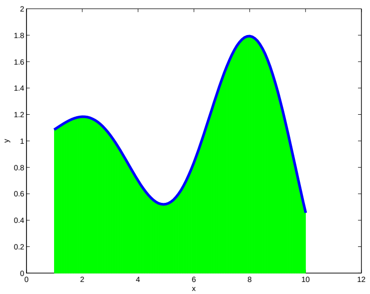
Notes

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Importanţa evaluării integralelor
Formularea problemei integrării numerice
Idei de calcul numeric

Idei de calcul numeric (II)

Semnificaţia geometrică a integralei



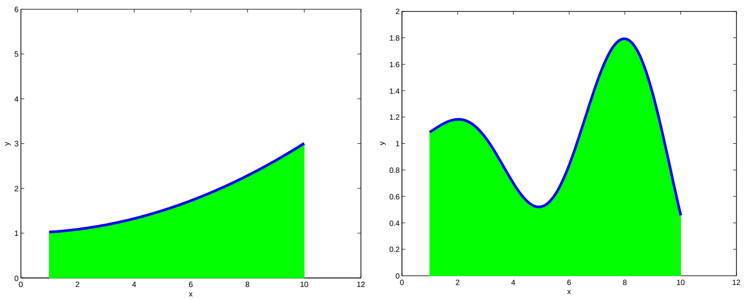


În calculator funcţiile nu au reprezentări continue.

Notes

Idei de calcul numeric (II)

Semnificaţia geometrică a integralei



În calculator funcţiile nu au reprezentări continue.

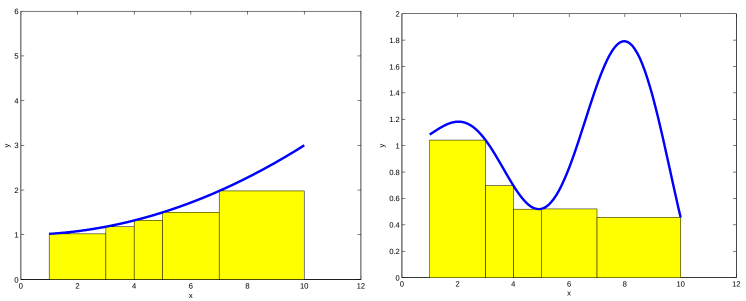
:|

Notes

Idei de calcul numeric (III)

Definiţia integralei folosind sume Darboux

Partiţia $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

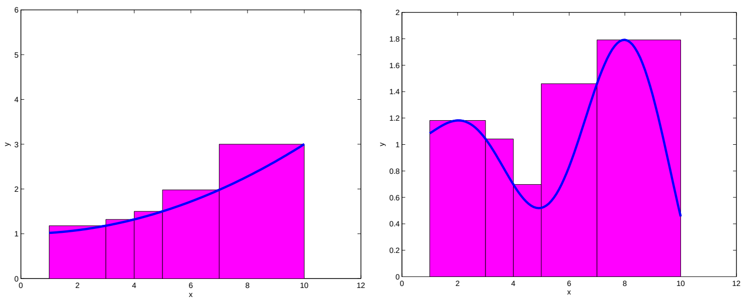


Notes

Idei de calcul numeric (III)

Definiţia integralei folosind sume Darboux

Partiţia $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$



Notes

Idei de calcul numeric (III)

Definiţia integralei folosind sume Darboux

Partiţia $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$m_i = \inf\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} \Rightarrow L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$

$M_i = \sup\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} \Rightarrow U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq U(f, \mathcal{P})$$

Dacă $\inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P})$ atunci această valoare este integrala (Riemann). :)

T. Orice funcţie continuă, mărginită, definită pe un domeniu închis este integrabilă Riemann.

Notes

Idei de calcul numeric (recap.)

Metodele de integrare numerică

- Sunt inspirate de metodele care calculează arii;
- Cea mai simplă metodă - aria e aproximată de o reuniune de dreptunghiuri.
  $f \approx g$, unde g este constantă pe porţiuni şi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- Aproximări mai rafinate pentru g pot conduce la rezultate mai bune.

Notes

Idei de calcul numeric

Algoritmii depind de modul în care este definită funcţia:

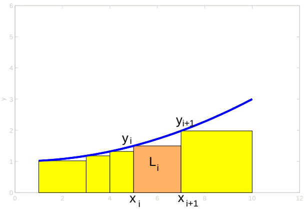
- printr-un tabel de valori

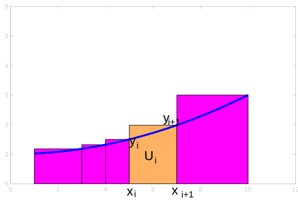
$$\{x_k, y_k = f(x_k)\}, \quad k = 0, n$$

- prin cod
  $f(x)$ poate fi evaluat în orice x din domeniul de definiţie.

Notes

Metoda dreptunghiurilor - Ideea





$$L_i = (x_{i+1} - x_i) * \min(y_i, y_{i+1})$$

$$U_i = (x_{i+1} - x_i) * \max(y_i, y_{i+1})$$

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} L_i$$

$$U = \sum_{i=0}^{n-1} U_i$$

Notes

Metoda dreptunghiurilor - Algoritm

```
funcţie integrala_dreptunghi(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda dreptunghiurilor
întreg n
tablou real x[n], y[n]          ; tabelul de valori, indici de la 0
. . .
L = 0
U = 0
pentru i = 0, n − 1
        m_i = min(y_i, y_{i+1})
        M_i = max(y_i, y_{i+1})
        h = x_{i+1} − x_i
        L = L + mh
        U = U + Mh
•
val.L = L
val.U = U
întoarce val
```


Notes

Metoda dreptunghiurilor - Algoritm

```
funcţie integrala_dreptunghi(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda dreptunghiurilor
întreg n
tablou real x[n], y[n]                ; tabelul de valori, indici de la 0
. . .
L = 0
U = 0
pentru i = 0, n − 1
        m_i = min(y_i, y_{i+1})
        M_i = max(y_i, y_{i+1})
        h = x_{i+1} − x_i
        L = L + mh
        U = U + Mh
•
val.L = L
val.U = U
întoarce val
```

T = O(5n)   M = O(2n)

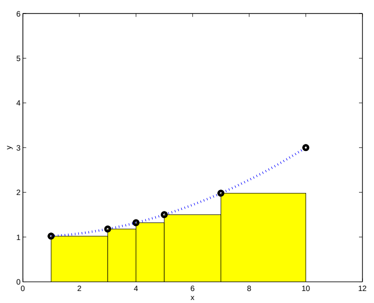
Notes

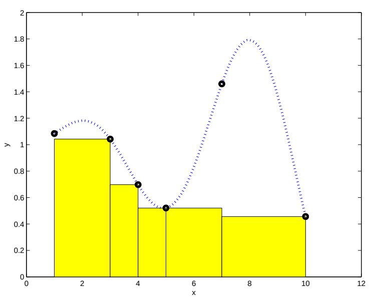
Metoda dreptunghiurilor - Pe scurt

În metoda dreptunghiurilor f este aproximată cu o funcţie g constantă pe porţiuni care încadrează inferior/superior funcţia.

Variante mai bune

- g este liniară pe porţiuni - metoda trapezelor;
- g parabolă pe porţiuni - metoda Simson





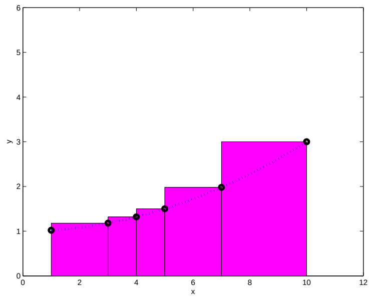
Dreptunghiuri - L

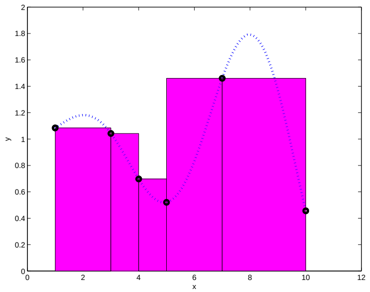
Notes

Metoda dreptunghiurilor - Pe scurt

În metoda dreptunghiurilor *f* este aproximată cu o funcţie *g* constantă pe porţiuni care încadrează inferior/superior funcţia.
Variante mai bune

- *g* este liniară pe porţiuni - metoda trapezelor;
- *g* parabolă pe porţiuni - metoda Simson





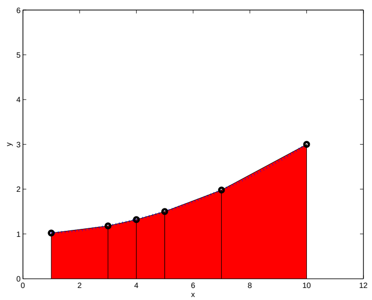
Dreptunghiuri - U

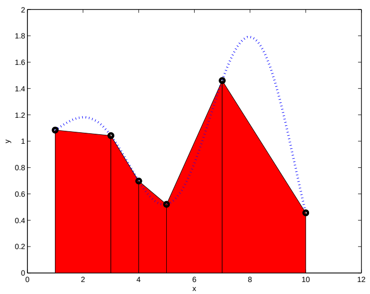
Notes

Metoda dreptunghiurilor - Pe scurt

În metoda dreptunghiurilor *f* este aproximată cu o funcţie *g* constantă pe porţiuni care încadrează inferior/superior funcţia.
Variante mai bune

- *g* este liniară pe porţiuni - metoda trapezelor;
- *g* parabolă pe porţiuni - metoda Simson

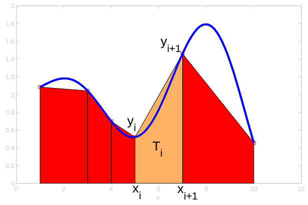




Trapeze

Notes

Metoda trapezelor - Ideea



$$T_i = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

$$T = \sum_{i=0}^{n-1} T_i$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(y_i+y_{i+1})(x_{i+1}-x_i)$$

Obs: $T = (L + U)/2$

Notes

Metoda trapezelor - Ideea

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

În cazul unui pas echidistant $x_{i+1} - x_i = h, \forall i = 0, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i + \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}\right) = \\ &= \frac{h}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n\right) = \\ &= h\left(\frac{1}{2}y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{1}{2}y_n\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

Notes

Metoda trapezelor - Pe scurt

Integrala numerică este o combinaţie liniară a valorilor funcţiei.

În metoda trapezelor coeficienţii sunt:

y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n
$\frac{h}{2}$	h	h	$\cdots$	h	h	$\frac{h}{2}$

Formulele de integrare numerică se mai numesc şi *reguli de cuadratură*.

Metoda trapezelor - Algoritm

```
funcţie integrala_trz(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor
întreg n
tablou real x[n], y[n]          ; tabelul de valori, indici de la 0
...
T = 0
pentru i = 0, n − 1
        h = x_{i+1} − x_i
        T = T + (y_i + y_{i+1})h
•
întoarce T
```


Notes

Notes

Metoda trapezelor - Algoritm

```
funcţie integrala_trz(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor
întreg n
tablou real x[n], y[n]            ; tabelul de valori, indici de la 0
...
T = 0
pentru i = 0, n − 1
        h = x_{i+1} − x_i
        T = T + (y_i + y_{i+1})h
•
întoarce T
```

$T = O(4n)$ $M = O(2n)$

Notes

Metoda trapezelor - Algoritm

```
funcţie integrala_trz_uniform(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor, pas echidistant
întreg n
tablou real x[1], y[n]            ; tabelul de valori, indici de la 0
...
T = (y_0 + y_n)/2
h = x_1 − x_0
pentru i = 1, n − 1
        T = T + y_i
•
întoarce Th
```


Notes

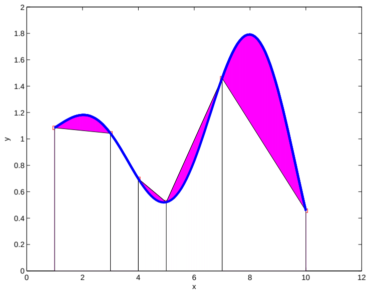
Metoda trapezelor - Algoritm

```
funcţie integrala_trz_uniform(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor, pas echidistant
întreg n
tablou real x[1], y[n]          ; tabelul de valori, indici de la 0
...
T = (y_0 + y_n)/2
h = x_1 - x_0
pentru i = 1, n - 1
        T = T + y_i
•
întoarce Th
```

T = O(n)   M = O(n)

Notes

Metoda trapezelor - Eroarea de trunchiere



- *locală* - pe fiecare interval;
- *globală* - pe întreg domeniul.

Notes

Metoda trapezelor - Eroarea de trunchiere

Eroarea locală absolută:

$$e_{\text{loc}} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (2)$$

$$e_{\text{loc}} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{x_k}^{x_{k+1}} e_{\text{interp}}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$e_{\text{interp}}(x) = \frac{f''(\zeta)}{2}(x - x_k)(x - x_{k+1})$$

$$e_{\text{loc}} = \frac{f''(\zeta)}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x - x_{k+1})\,\mathrm{d}x = -\frac{f''(\zeta)}{12}(x_{k+1} - x_k)^3$$

$$|e_{\text{loc}}| \le Ch^3$$

unde $h = x_{k+1} - x_k$ $\qquad |e_{\text{loc}}| = \mathrm{O}(h^2)$

Notes

Metoda trapezelor - Eroarea de trunchiere

Eroarea globală absolută:

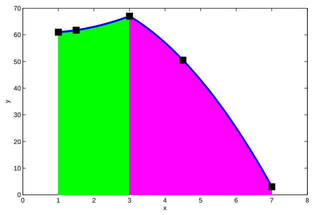
$$e_{\text{g}} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (3)$$

$$e_{\text{g}} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} e_{\text{loc,k}}$$

$$|e_{\text{g}}| \le nCh^3 = \frac{b-a}{h}Ch^3 = \mathrm{O}(h^2)$$

Notes

Metoda Simpson - Ideea



$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(x)\,\mathrm{d}x$$

unde g este polinomul de interpolare locală de ordin 2.

$$S = S_1 + S_3 + \cdots + S_{n-1}$$

Numărul de puncte din tabel trebuie să fie impar.

Notes

Metoda Simpson - Pe scurt

În cazul unui pas echidistant, se demonstrează că

$$S_i = h\left(\frac{1}{3}y_{i-1} + \frac{4}{3}y_i + \frac{1}{3}y_{i+1}\right)$$

$\Rightarrow$

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	$\cdots$	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n
$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\cdots$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$

$|e_g| = O(h^4)$

OBS: dacă funcţia e definită prin cod, este mai eficient să ajungem la o astfel de eroare folosind extrapolarea Richardson.

Notes

Metoda trapezelor - eroare

Pasul de integrare poate fi ales de utilizator.

- Eroarea globală de trunchiere $O(h^2) \Rightarrow$ scade atunci când h scade;
- Dar rotunjirile?

Notes

Metoda trapezelor - eroare

Dacă pp. $e_{y_k}/y_k < \mathrm{eps}$ şi $e_h = 0$ atunci

$$\begin{aligned} e_r &\leq h\left(1/2|e_{y_0}| + 1/2|e_{y_n}| + \sum_{k=1}^{n}|e_{y_k}|\right) \leq \\ &\leq h\left(1/2|y_0|\mathrm{eps} + 1/2|y_n|\mathrm{eps} + \sum_{k=1}^{n}|y_k|\mathrm{eps}\right) \leq \\ &\leq ChnM_0\,\mathrm{eps} = C(b-a)M_0\,\mathrm{eps} = O(1) \end{aligned}$$

Integrala este mult mai robustă decât derivarea numerică.
Nu numai că erorile de trunchiere sunt mai mici pentru acelaşi tip de funcţie de intepolare (Ipp), dar şi efectul erorilor de rotunjire este mai mic.

Notes

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcţiilor date prin cod
operaţia de referinţă este evaluarea funcţiei de integrat.

- Numărul de evaluări de funcţii creşte cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un compromis între pasul de integrare şi efortul de calcul. Notasem:

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + y_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

Notes

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Analiza erorii
Metoda trapezelor recursive
Metoda Romberg

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcţiilor date prin cod
operaţia de referinţă este evaluarea funcţiei de integrat.

- Numărul de evaluări de funcţii creşte cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un compromis între pasul de integrare şi efortul de calcul. Notasem:

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + y_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

$$T = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n)) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

Notes

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcţiilor date prin cod
operaţia de referinţă este evaluarea funcţiei de integrat.

- Numărul de evaluări de funcţii creşte cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un compromis între pasul de integrare şi efortul de calcul. Notasem:

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + y_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

$$T(f, \mathcal{P}) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n)) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

Notes

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Analiza erorii
Metoda trapezelor recursive
Metoda Romberg

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcţiilor date prin cod
operaţia de referinţă este evaluarea funcţiei de integrat.

- Numărul de evaluări de funcţii creşte cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un compromis între pasul de integrare şi efortul de calcul. Notasem:

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + y_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

$$T(f, \mathcal{P}) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n)) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

unde $\mathcal{P}$ este o partiţie a domeniului: $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$

Notes

Trapeze recursive - Ideea

- Se înjumătăţesc intervalele până când valoarea integralei nu se mai modifică;
- La fiecare pas se evaluează funcţia numai în punctele în care nu a mai fost evaluată.

Partiţia iniţială: $\mathcal{P}_0$: $a = x_0, x_1 = b$
Pasul iniţial: $h_0 = b - a$
Prima aproximaţie a integralei:

$$T_0 = T(f, \mathcal{P}_0) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Notes

Introducere
Integrarea funcţiilor cunoscute prin date
Integrarea funcţiilor cunoscute prin cod
Analiza erorii
Metoda trapezelor recursive
Metoda Romberg

Trapeze recursive - Ideea

$\mathcal{P}_1$: $a = x_0, x_1^{(1)} = (a+b)/2, x_2 = b$
$h_1 = (b-a)/2$

$$T_1 = T(f, \mathcal{P}_1) = \frac{h_1}{2}(f(a) + f(b)) + h_1 f(x_1^{(1)})$$

o evaluare nouă

$\mathcal{P}_2$: $a = x_0, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4 = b$
$h_2 = (b-a)/2^2$

$$T_2 = T(f, \mathcal{P}_2) = \frac{h_2}{2}(f(a) + f(b)) + h_2 \sum_{i=1}^{3} f(x_i^{(2)})$$

două evaluari noi

Notes

Trapeze recursive - Ideea

$\mathcal{P}_m$: $a = x_0, x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_{2^m} = b$
$h_m = (b-a)/2^m$

$$T_m = T(f, \mathcal{P}_m) = \frac{h_m}{2}(f(a) + f(b)) + h_m \sum_{i=1}^{2^m-1} (x_i^{(m)})$$

Algoritmul se bazează pe următoarea relaţie de recurenţă:

$$T_m = \frac{1}{2} T_{m-1} + h_m \sum_{i=1}^{2^m-1} f(a + (2i-1)h_m)$$

$T_0, T_1, T_2, T_3, \ldots$
şi se opreşte atunci când diferenţa dintre două aproximaţii consecutive este mai mică decât o toleranţă impusă.

Notes

Trapeze recursive - Alte notaţii

Alte notaţii, utile pentru ce urmează:

$$T_m = R(m, 0)$$

(R - de la *Romberg*)

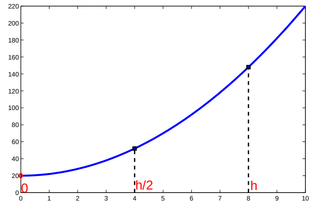
$$R(m, 0) = \frac{1}{2} R(m-1, 0) + h \sum_{i=1}^{2^{m-1}} f(a + (2i-1)h)$$

unde $h = (b-a)/2^m$.

Notes

Extrapolarea Richardson - Ideea

La trapeze, eroarea globală este $O(h^2)$: $I(h) = I_0 + Ch^2$



1. Evaluăm integrala pentru h_0:

$$I_1 = I_0 + Ch_0^2$$

2. Reducem pasul la jumătate:

$$I_2 = I_0 + C\left(\frac{h_0}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$I_0 = \frac{4I_2 - I_1}{3}$$

Notes

Extrapolarea Richardson

Obs:

- Formula care se obţine este exact formula Simpson (nr. impar de noduri).
- I_0 nu este chiar valoarea exactă (nici într-o aritmetică precisă), deoarece se demonstrează că eroare de trunchiere este mai precis

$$I(h) = I_0 + c_2h^2 + c_4h^4 + c_6h^6 + \cdots$$

Mai corect este să aplicăm extrapolarea Richardson, aşa cum am procedat la derivare.

Notes

Extrapolare Richardson - Ideea generală

Se poate aplica pentru aproximarea cu acurateţe din ce în ce mai mare a unei mărimi I, pentru care există o funcţie $\varphi(h)$. a.î.

- $I = \lim_{h\to 0} \varphi(h)$
- $\varphi(h)$ poate fi evaluată pentru orice h;
- are loc proprietatea:

$$\varphi(h) = I - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} h^{2k} \tag{4}$$

unde coeficienţii a_{2k} nu sunt cunoscuţi.

Se alege un h potrivit şi se calculează numerele

$$R(i,0) = \varphi(h/2^i), \quad i = 0, \dots, n. \tag{5}$$

Notes

Extrapolare Richardson - Ideea generală

$R(i,0)$ reprezintă estimări ale lui I, dar estimări mai precise se pot obţine prin extrapolare Richardson.
Se demonstrează că [Cheney]:

$$R(i,j) = R(i,j-1) + (R(i,j-1) - R(i-1,j-1))/(4^i - 1), \quad j = 0, \dots, i. \tag{6}$$

$$\begin{array}{lllll} R(0,0) & & & & \\ R(1,0) & R(1,1) & & & \\ R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ R(n,0) & R(n,1) & R(n,2) & \cdots & R(n,n) \end{array} \tag{7}$$

Notes

Metoda Romberg

Metoda Romberg = extrapolare Richardson pentru evaluarea integralelor Se dau:

- funcţia dată prin cod f;
- informaţia despre ordinul erorii la care dorim să ajungem n.

...

<u>pentru</u> $i = 0, n$

$R_{i,0} = \dots$; apel trapeze

<u>pentru</u> $j = 1, i$

$$R_{i,j} = R_{i,j-1} + (R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1})/(4^i - 1)$$

•

$h = h/2$

•

...

Notes

Lectură recomandată

Obligatoriu:

- Cap.8 din

  [1] Gabriela Ciuprina, Mihai Rebican, Daniel Ioan - Metode numerice in ingineria electrica - Indrumar de laborator pentru studentii facultatii de Inginerie electrica, Editura Printech, 2013, disponibil la

  http://mn.lmn.pub.ro/indrumar/IndrumarMN_Printech2013.pdf

Facultativ:

- Cap 5 din
  [Cheney] Ward Cheney and David Kincaid, Numerical Mathematics and Computing, Brooks/Cole publishing Company,2000.

  http://www.physics.brocku.ca/Courses/5P10/References/cheneykincaid.pdf

Notes