

Integrarea numerică

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" București, Facultatea de Inginerie Electrică

Suport didactic pentru disciplina *Metode numerice*, 2017-2018

Cuprins

- 1 Introducere
 - Importanța evaluării integralelor
 - Formularea problemei integrării numerice
 - Idei de calcul numeric
- 2 Integrarea funcțiilor cunoscute prin date
 - Metoda dreptunghiurilor
 - Metoda trapezelor
 - Metoda Simpson
- 3 Integrarea funcțiilor cunoscute prin cod
 - Analiza erorii
 - Metoda trapezelor recursive
 - Metoda Romberg

Importanța evaluării integralelor

- Relații utile pentru evaluarea unor mărimi:

$$u = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad q = \int_D \rho \, dv$$

- Rezolvarea ecuațiilor diferențiale

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(t'), t') \, dt'$$

"rezolvare" = "integrare" (în acest context)

Formularea problemei - cazul cel mai simplu

Se dă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (cunoscută prin date sau prin cod)

Se cere evaluarea numerică a integralei definite

$$\int_a^b f(x) dx$$

unde f este presupusă continuă și mărginită.

Numeric: idei inspirate din matematică.

Idei de calcul numeric (I)

T. fundamentală a analizei

Dacă f e continuă și F este o primitivă a ei ($F' = f$) atunci

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

În problemele reale F nu este cunoscută \Rightarrow aplicarea acestei metode este foarte grea / imposibilă.

Idei de calcul numeric (I)

T. fundamentală a analizei

Dacă f e continuă și F este o primitivă a ei ($F' = f$) atunci

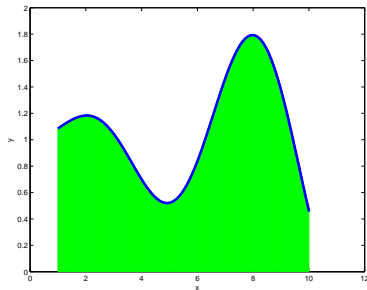
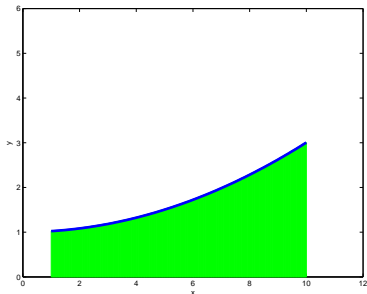
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

În problemele reale F nu este cunoscută \Rightarrow aplicarea acestei metode este foarte grea / imposibilă.

:(

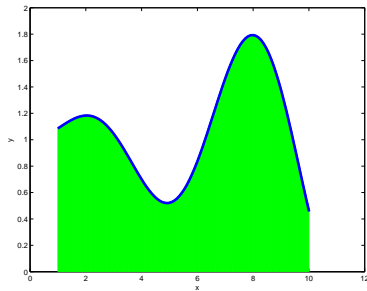
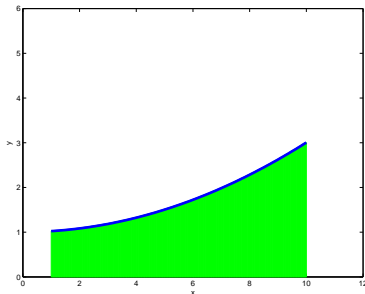
Idei de calcul numeric (II)

Semnificația geometrică a integralei



Idei de calcul numeric (II)

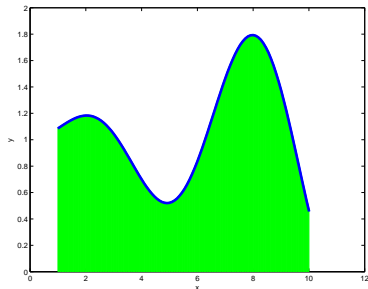
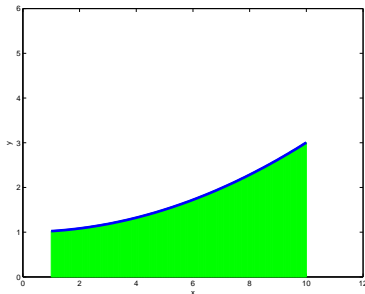
Semnificația geometrică a integralei



În calculator funcțiile nu au reprezentări continue.

Idei de calcul numeric (II)

Semnificația geometrică a integralei



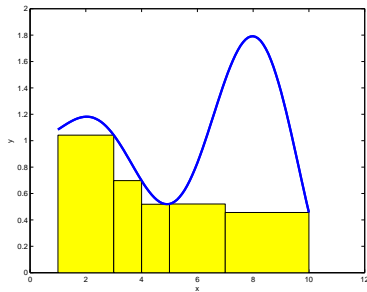
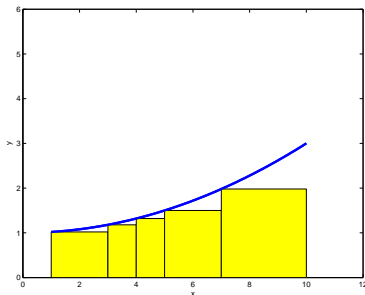
În calculator funcțiile nu au reprezentări continue.

∴

Idei de calcul numeric (III)

Definiția integralei folosind sume Darboux

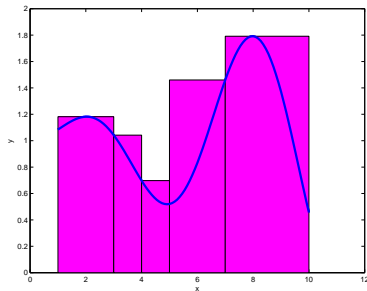
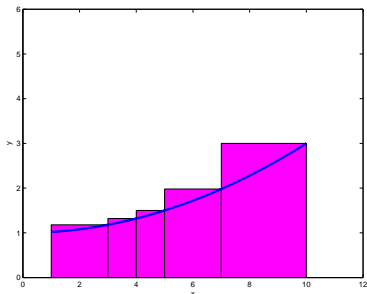
Partiția $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$



Idei de calcul numeric (III)

Definiția integralei folosind sume Darboux

Partiția $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$



Idei de calcul numeric (III)

Definiția integralei folosind sume Darboux

Partiția $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$m_i = \inf\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} \Rightarrow L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\} \Rightarrow U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, \mathcal{P})$$

Dacă $\inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P})$ atunci această valoare este integrala (Riemann). :)

T. Orice funcție continuă, mărginită, definită pe un domeniu închis este integrabilă Riemann.

Idei de calcul numeric (recap.)

Metodele de integrare numerică

- Sunt inspirate de metodele care calculează **arii**;
- Cea mai simplă metodă - aria e aproximată de o reuniune de dreptunghiuri.

$f \approx g$, unde g este constantă pe porțiuni și

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b g(x) dx$$

- Aproximări mai rafinate pentru g pot conduce la rezultate mai bune.

Idei de calcul numeric

Algoritmii depind de modul în care este definită funcția:

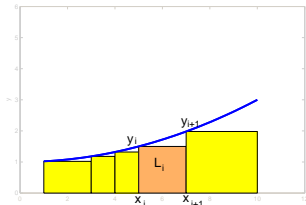
- printr-un tabel de valori

$$\{x_k, y_k = f(x_k)\}, \quad k = 0, n$$

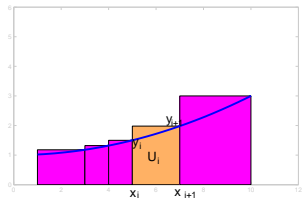
- prin cod

$f(x)$ poate fi evaluat în orice x din domeniul de definiție.

Metoda dreptunghiurilor - Ideea



$$L_i = (x_{i+1} - x_i) * \min(y_i, y_{i+1})$$



$$U_i = (x_{i+1} - x_i) * \max(y_i, y_{i+1})$$

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} L_i$$

$$U = \sum_{i=0}^{n-1} U_i$$

Metoda dreptunghiurilor - Algoritm

```

funcție integrala_dreptunghi(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda dreptunghiurilor
întreg n
tablou real x[n], y[n]           ; tabelul de valori, indici de la 0
...
L = 0
U = 0
pentru i = 0, n - 1
    mi = min(yi, yi+1)
    Mi = max(yi, yi+1)
    h = xi+1 - xi
    L = L + mh
    U = U + Mh
•
val.L = L
val.U = U
întoarce val

```


Metoda dreptunghiurilor - Algoritm

```

funcție integrala_dreptunghi(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda dreptunghiurilor
  întreg n
  tablou real x[n], y[n]           ; tabelul de valori, indici de la 0
  ...
  L = 0
  U = 0
  pentru i = 0, n - 1
    mi = min(yi, yi+1)
    Mi = max(yi, yi+1)
    h = xi+1 - xi
    L = L + mh
    U = U + Mh
  •
  val.L = L
  val.U = U
  întoarce val

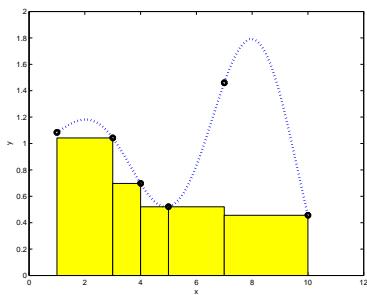
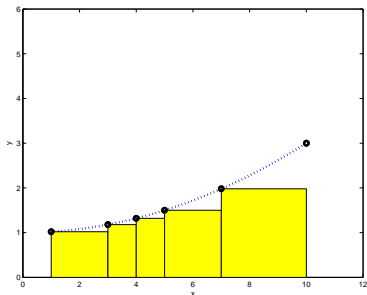
```

$$T = O(5n) \quad M = O(2n)$$

Metoda dreptunghiurilor - Pe scurt

În metoda dreptunghiurilor f este aproximată cu o funcție g constantă pe porțiuni care încadrează inferior/superior funcția.
Variante mai bune

- g este liniară pe porțiuni - **metoda trapezelor**;
- g parabolă pe porțiuni - **metoda Simpson**

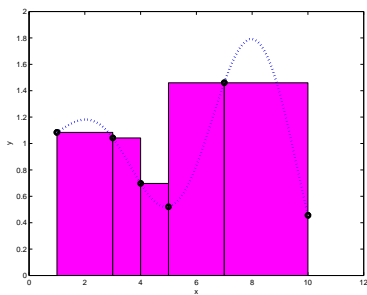
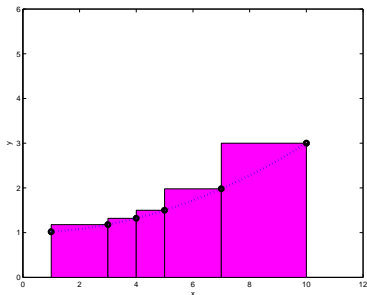


Dreptunghiuri - L

Metoda dreptunghiurilor - Pe scurt

În metoda dreptunghiurilor f este aproximată cu o funcție g constantă pe porțiuni care încadrează inferior/superior funcția. Variante mai bune

- g este liniară pe porțiuni - metoda trapezelor;
- g parabolă pe porțiuni - metoda Simpson

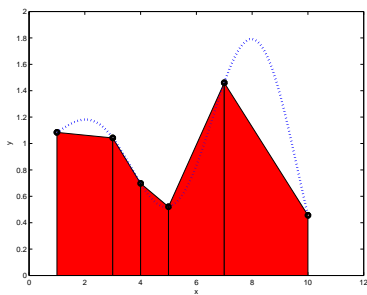
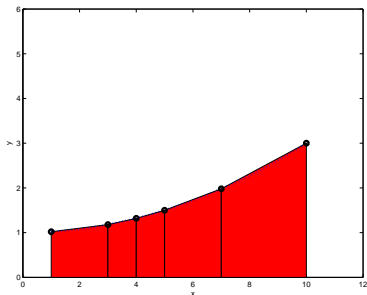


Dreptunghiuri - U

Metoda dreptunghiurilor - Pe scurt

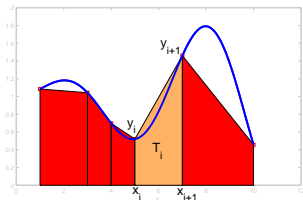
În metoda dreptunghiurilor f este aproximată cu o funcție g constantă pe porțiuni care încadrează inferior/superior funcția.
Variante mai bune

- g este liniară pe porțiuni - metoda trapezelor;
- g parabolă pe porțiuni - metoda Simpson



Trapeze

Metoda trapezelor - Ideea



$$T_i = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

$$T = \sum_{i=0}^{n-1} T_i$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

Obs: $T = (L + U)/2$

Metoda trapezelor - Ideea

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

În cazul unui pas echidistant $x_{i+1} - x_i = h, \forall i = 0, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i + \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} \right) = \\ &= \frac{h}{2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i + \sum_{i=1}^n y_i \right) = \frac{h}{2} \left(y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n \right) = \\ &= h \left(\frac{1}{2} y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{1}{2} y_n \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Metoda trapezelor - Pe scurt

Integrala numerică este o combinație liniară a valorilor funcției.

În metoda trapezelor coeficienții sunt:

$$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_{n-2} \quad y_{n-1} \quad y_n$$

$$\frac{h}{2} \quad h \quad h \quad \cdots \quad h \quad h \quad \frac{h}{2}$$

Formulele de integrare numerică se mai numesc și *reguli de cuadratură*.

Metoda trapezelor - Algoritm

funcție `integrala_trz(n,x,y)`

; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor

întreg `n`

tablou real `x[n], y[n]`

; tabelul de valori, indici de la 0

...

`T = 0`

pentru `i = 0, n - 1`

`h = xi+1 - xi`

`T = T + (yi + yi+1)h`

•

întoarce `T`

Metoda trapezelor - Algoritm

funcție `integrala_trz(n,x,y)`

; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor

întreg `n`

tablou real `x[n], y[n]`

; tabelul de valori, indici de la 0

...

`T = 0`

pentru `i = 0, n - 1`

`h = xi+1 - xi`

`T = T + (yi + yi+1)h`

•

întoarce `T`

$T = O(4n)$ $M = O(2n)$

Metoda trapezelor - Algoritm

funcție `integrala_trz_uniform(n,x,y)`

; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor, pas echidistant

întreg `n`

tablou real `x[1], y[n]`

; tabelul de valori, indici de la 0

...

$$T = (y_0 + y_n)/2$$

$$h = x_1 - x_0$$

pentru `i = 1, n - 1`

$$T = T + y_i$$

•

întoarce `Th`

Metoda trapezelor - Algoritm

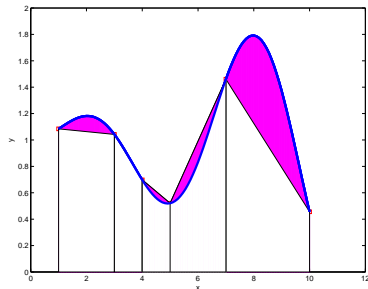
```

funcție integrala_trz_uniform(n,x,y)
; calculează integrala numerică prin metoda trapezelor, pas echidistant
întreg n
tablou real x[1], y[n]           ; tabelul de valori, indici de la 0
...
 $T = (y_0 + y_n)/2$ 
 $h = x_1 - x_0$ 
pentru  $i = 1, n - 1$ 
     $T = T + y_i$ 
•
întoarce  $Th$ 

```

$$T = O(n) \quad M = O(n)$$

Metoda trapezelor - Eroarea de trunchiere



- *locală* - pe fiecare interval;
- *globală* - pe întreg domeniul.

Metoda trapezelor - Eroarea de trunchiere

Eroarea **locală** absolută:

$$e_{\text{loc}} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) dx \quad (2)$$

$$e_{\text{loc}} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - g(x)) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} e_{\text{interp}}(x) dx$$

$$e_{\text{interp}}(x) = \frac{f''(\zeta)}{2} (x - x_k)(x - x_{k+1})$$

$$e_{\text{loc}} = \frac{f''(\zeta)}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x - x_{k+1}) dx = -\frac{f''(\zeta)}{12} (x_{k+1} - x_k)^3$$

$$|e_{\text{loc}}| \leq Ch^3$$

unde $h = x_{k+1} - x_k$

$$|e_{\text{loc}}| = O(h^2)$$

Metoda trapezelor - Eroarea de trunchiere

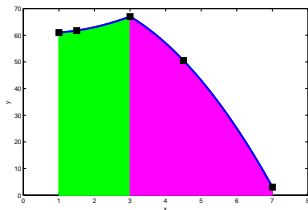
Eroarea **globală** absolută:

$$e_g = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \quad (3)$$

$$e_g = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - g(x)) dx = \sum_{k=0}^{n-1} e_{\text{loc},k}$$

$$|e_g| \leq nCh^3 = \frac{b-a}{h} Ch^3 = O(h^2)$$

Metoda Simpson - Ideea



$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(x) dx$$

unde g este polinomul de interpolare locală de ordin 2.

$$S = S_1 + S_3 + \cdots + S_{n-1}$$

Numărul de puncte din tabel trebuie să fie impar.

Metoda Simpson - Pe scurt

În cazul unui pas echidistant, se demonstrează că

$$S_i = h \left(\frac{1}{3}y_{i-1} + \frac{4}{3}y_i + \frac{1}{3}y_{i+1} \right)$$

⇒

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_{n-2} & y_{n-1} & y_n \\
 \frac{h}{3} & \frac{4h}{3} & \frac{2h}{3} & \frac{4h}{3} & \frac{2h}{3} & \cdots & \frac{2h}{3} & \frac{4h}{3} & \frac{h}{3}
 \end{array}$$

$$|e_g| = O(h^4)$$

OBS: dacă funcția e definită prin cod, este mai eficient să ajungem la o astfel de eroare folosind extrapolarea Richardson.

Metoda trapezelor - eroare

Pasul de integrare poate fi ales de utilizator.

- Eroarea globală de trunchiere $O(h^2) \Rightarrow$ scade atunci când h scade;
- Dar rotunjirile?

Metoda trapezelor - eroare

Dacă pp. $e_{y_k}/y_k < \text{eps}$ și $e_h = 0$ atunci

$$\begin{aligned}
 e_r &\leq h \left(1/2|e_{y_0}| + 1/2|e_{y_n}| + \sum_{k=1}^n |e_{y_k}| \right) \leq \\
 &\leq h \left(1/2|y_0|\text{eps} + 1/2|y_n|\text{eps} + \sum_{k=1}^n |y_k|\text{eps} \right) \leq \\
 &\leq ChnM_0 \text{eps} = C(b-a)M_0 \text{eps} = O(1)
 \end{aligned}$$

Integrala este mult mai robustă decât derivarea numerică.

Nu numai că erorile de trunchiere sunt mai mici pentru același tip de funcție de interpolare (lpp), dar și efectul erorilor de rotunjire este mai mic.

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcțiilor date prin cod

operația de referință este evaluarea funcției de integrat.

- Numărul de evaluări de funcții crește cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un **compromis între pasul de integrare și efortul de calcul**. Notasem:

$$T = \frac{h}{2} (y_0 + y_n) + h \sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcțiilor date prin cod

operația de referință este evaluarea funcției de integrat.

- Numărul de evaluări de funcții crește cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un **compromis între pasul de integrare și efortul de calcul**. Notasem:

$$T = \frac{h}{2} (y_0 + y_n) + h \sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

$$T = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_n)) + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcțiilor date prin cod

operația de referință este evaluarea funcției de integrat.

- Numărul de evaluări de funcții crește cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un **compromis între pasul de integrare și efortul de calcul**. Notasem:

$$T = \frac{h}{2} (y_0 + y_n) + h \sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

$$T(f, \mathcal{P}) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_n)) + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

Metoda trapezelor - efort de calcul

În cazul funcțiilor date prin cod

operația de referință este evaluarea funcției de integrat.

- Numărul de evaluări de funcții crește cu atunci când h scade.

Trebuie făcut un **compromis între pasul de integrare și efortul de calcul**. Notasem:

$$T = \frac{h}{2} (y_0 + y_n) + h \sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

E mai bine să notăm acum:

$$T(f, \mathcal{P}) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_n)) + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

unde \mathcal{P} este o partiție a domeniului: $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$

Trapeze recursive - Ideea

- Se înjumătățesc intervalele până când valoarea integralei nu se mai modifică;
- La fiecare pas se evaluează funcția numai în punctele în care nu a mai fost evaluată.

Partiția inițială: $\mathcal{P}_0: a = x_0, x_1 = b$

Pasul inițial: $h_0 = b - a$

Prima aproximație a integralei:

$$T_0 = T(f, \mathcal{P}_0) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Trapeze recursive - Ideea

$$\mathcal{P}_1: a = x_0, x_1^{(1)} = (a + b)/2, x_2 = b$$

$$h_1 = (b - a)/2$$

$$T_1 = T(f, \mathcal{P}_1) = \frac{h_1}{2}(f(a) + f(b)) + h_1 f(x_1^{(1)})$$

o evaluare nouă

$$\mathcal{P}_2: a = x_0, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4 = b$$

$$h_2 = (b - a)/2^2$$

$$T_2 = T(f, \mathcal{P}_2) = \frac{h_2}{2}(f(a) + f(b)) + h_2 \sum_{i=1}^3 f(x_i^{(2)})$$

două evaluari noi

Trapeze recursive - Ideea

$$\mathcal{P}_m: a = x_0, x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_{2^m} = b$$

$$h_m = (b - a)/2^m$$

$$T_m = T(f, \mathcal{P}_m) = \frac{h_m}{2}(f(a) + f(b)) + h_m \sum_{i=1}^{2^m-1} (x_i^{(m)})$$

Algoritmul se bazează pe următoarea relație de recurență:

$$T_m = \frac{1}{2}T_{m-1} + h_m \sum_{i=1}^{2^m-1} f(a + (2i - 1)h_m)$$

$T_0, T_1, T_2, T_3, \dots$

și se oprește atunci când diferența dintre două aproximații consecutive este mai mică decât o toleranță impusă.

Trapeze recursive - Alte notații

Alte notații, utile pentru ce urmează:

$$T_m = R(m, 0)$$

(R - de la *Romberg*)

$$R(m, 0) = \frac{1}{2}R(m-1, 0) + h \sum_{i=1}^{2^{m-1}} f(a + (2i-1)h)$$

unde $h = (b - a)/2^m$.

Extrapolarea Richardson - Ideea

La trapeze, eroarea globală este $O(h^2)$: $I(h) = I_0 + Ch^2$

- 1 Evaluăm integrala pentru h_0 :

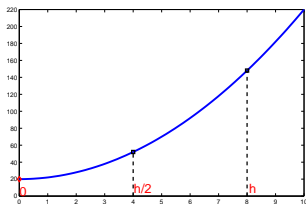
$$I_1 = I_0 + Ch_0^2$$

- 2 Reducem pasul la jumătate:

$$I_2 = I_0 + C \left(\frac{h_0}{2} \right)^2$$

⇒

$$I_0 = \frac{4I_2 - I_1}{3}$$



Extrapolarea Richardson

Obs:

- Formula care se obține este exact formula Simpson (nr. impar de noduri).
- I_0 nu este chiar valoarea exactă (nici într-o aritmetică precisă), deoarece se demonstrează că eroare de trunchiere este mai precis

$$I(h) = I_0 + c_2 h^2 + c_4 h^4 + c_6 h^6 + \dots$$

Mai corect este să aplicăm extrapolarea Richardson, așa cum am procedat la derivare.

Extrapolare Richardson - Ideea generală

Se poate aplica pentru aproximarea cu acuratețe din ce în ce mai mare a unei mărimi I , pentru care există o funcție $\varphi(h)$. a.î.

- $I = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h)$
- $\varphi(h)$ poate fi evaluată pentru orice h ;
- are loc proprietatea:

$$\varphi(h) = I - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} h^{2k} \quad (4)$$

unde coeficienții a_{2k} nu sunt cunoscuți.

Se alege un h potrivit și se calculează numerele

$$R(i, 0) = \varphi(h/2^i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (5)$$

Extrapolare Richardson - Ideea generală

$R(i, 0)$ reprezintă estimări ale lui I , dar estimări mai precise se pot obține prin extrapolare Richardson.

Se demonstrează că [Cheney]:

$$R(i, j) = R(i, j - 1) + (R(i, j - 1) - R(i - 1, j - 1)) / (4^j - 1), \quad j = 0, \dots, i. \quad (6)$$

$$\begin{array}{cccc}
 R(0, 0) & & & \\
 R(1, 0) & R(1, 1) & & \\
 R(2, 0) & R(2, 1) & R(2, 2) & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \\
 R(n, 0) & R(n, 1) & R(n, 2) & \dots R(n, n)
 \end{array} \quad (7)$$

Metoda Romberg

Metoda Romberg = extrapolare Richardson pentru evaluarea integralelor Se dau:

- funcția dată prin cod f ;
- informația despre ordinul erorii la care dorim să ajungem n .

...

pentru $i = 0, n$

$R_{i,0} = \dots$; apel trapeze

pentru $j = 1, i$

$$R_{i,j} = R_{i,j-1} + (R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}) / (4^j - 1)$$

•

$h = h/2$

•

...

Lectură recomandată

Obligatoriu:

- Cap.8 din

[1] Gabriela Ciuprina, Mihai Rebican, Daniel Ioan - Metode numerice in ingineria electrica - Indrumar de laborator pentru studentii facultatii de Inginerie electrica, Editura Printech, 2013, disponibil la

http://mn.lmn.pub.ro/indrumar/IndrumarMN_Printech2013.pdf

Facultativ:

- Cap 5 din

[Cheney] Ward Cheney and David Kincaid, Numerical Mathematics and Computing, Brooks/Cole publishing Company,2000.

<http://www.physics.brocku.ca/Courses/5P10/References/cheneykincaid.pdf>